ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 621.39.1:519.34

Член-корреспондент НАН РА И. Д. Заславский

Обобщенная нечеткая конструктивная логика[1]

(Представлено 1/VI 2015)

Ключевые слова: *нечеткая логика, конструктивная математика, математическая логика, предикат, квантор*.

1. **Введение.** В этой статье рассматриваются некоторые вопросы нечеткой логики [1-3] в рамках конструктивного направления в математике [4-6]. Аналогичные вопросы рассмотрены в статьях [7] и [8]. В дальнейшем изложении представлены некоторые обобщения результатов статей [7] и [8]; эти обобщения могут быть предметом исследований и с классической теоретико-множественной точки зрения, а также с точки зрения их возможных приложений. А именно, вместо обычно применяемого в нечеткой логике линейного упорядочения истинностных значений в дальнейших расмотрениях применяется частичное упорядочение значений. Очевидно прикладное значение подобных логических систем. Так, например, в числе характеристик некоторого агрегата могут фигурировать в числе других, скажем, два параметра: с одной стороны, стоимость его производства, с другой стороны, – точность работы операций, осуществляемых агрегатом. Иногда (например, при массовом производстве) основной характеристикой является стоимость производства, быть может, при ослабленных требованиях на точность операций, осуществляемых агрегатом; в других случаях, напротив, основной характеристикой является точность осуществляемых операций. Для полного описания требований, предъявляемых к агрегату, необходим учет различных возможных сочетаний указанных его характеристик. В целом положение дел определяется некоторыми наборами характеристик агрегата; множество таких наборов является в обычных случаях частично упорядоченным. Число подобных примеров можно, разумеется, увеличить.

[1] Настоящая работа поддержана Государственным комитетом по науке Министерства образования и науки РА в рамках исследовательского проекта № SCS 13-1B321.

В дальнейшем изложении рассматривается математическое описание ситуаций указанного типа в рамках конструктивной математики. Автору не удалось обнаружить прямых аналогов подобных рассмотрений в имеющейся литературе (хотя некоторые детали изложения в работах [2] и [3] имеют определенное сходство с идеями, рассматриваемыми в этой статье).

2. **Основные понятия.** Посредством N будем обозначать множество целых неотрицательных чисел $N = \{0,1,2,...\}$. Посредством N^n, где $n \geq 1$, будем обозначать множество n-членных систем $(x_1, x_2,..., x_n)$, где $x_i \in N$ при $1 \leq i \leq n$.

Понятия частично рекурсивной функции, общерекурсивной функции, примитивно рекурсивной функции, рекурсивно перечислимого множества (а также, соответсвенно, предиката), рекурсивного множества (соответственно, предиката), примитивно рекурсивного множества (соответственно, предиката) определяются так же, как в [9-12]. Указанные термины будут кратко обозначаться посредством ЧРФ, ОРФ, ПРФ, РПМ, РПП, РМ, РП, ПРМ, ПРП.

Дальнейшие понятия рассматриваются в рамках конструктивного направления в математике [4-6]; логические операции $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ будут пониматься в соответствии с правилами конструктивной (интуиционистской) логики [4-6, 9,14]. Принцип А. А. Маркова [4, 5, 13] не будет использоваться в применяемом ниже аппарате этой логики. Термин “множество” будет пониматься в конструктивном смысле, а именно, рассматриваются только такие множества, которые задаются формулами в тех или иных логико-математических языках [5, 6, 14]. Аналогичным образом рассматривается понятие предиката. В качестве основного логико-математического языка обычно будем использовать язык содержательно понимаемой конструктивной (интуиционистской) арифметики [9, 14]. Конструктивное (интуиционистское) исчисление предикатов [9, 14] будем обозначать посредством H^{con}.

3. **Шкалы истинности. Алгоритмической шкалой истинности** (сокращенно АШИ) будем называть систему объектов $\mathbf{\Omega}$, состоящую из следующих компонент: (1) рекурсивное множество чисел из N, именуемое в дальнейшем “универсумом” данной АШИ $\mathbf{\Omega}$; его мы будем обозначать посредством $\mathbf{U}_\Omega$; (2) двуместный рекурсивно перечислимый предикат равенства, обозначаемый в дальнейшем посредством $\underset{\Omega}{=}$, определенный для всех пар (x, y), где $x \in \mathbf{U}_\Omega$, $y \in \mathbf{U}_\Omega$, и обладающий свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности; (3) двуместные операции $\bigcup\limits_\Omega$ и $\bigcap\limits_\Omega$, задаваемые посредством некоторых ЧРФ, определенные для всех пар (x, y), где $x \in \mathbf{U}_\Omega$, $y \in \mathbf{U}_\Omega$, и корректные относительно равенства $\underset{\Omega}{=}$ (таким образом, если $x \underset{\Omega}{=} x_1$, $y \underset{\Omega}{=} y_1$, то $x \bigcup\limits_\Omega y = x_1 \bigcup\limits_\Omega y_1$,

$x\bigcap_{\Omega} y = x_1 \bigcap_{\Omega} y_1$); (4) константы $\mathbf{0}_\Omega \in \mathbf{U}_\Omega$ и $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbf{U}_\Omega$; при этом предполагаем, что для любых $x \in \mathbf{U}_\Omega, y \in \mathbf{U}_\Omega, z \in \mathbf{U}_\Omega$ имеют место следующие соотношения (означающие фактически, что операции $\bigcup_\Omega$ и $\bigcap_\Omega$ вместе с константами $\mathbf{0}_\Omega$ и $\mathbf{1}_\Omega$ образуют дистрибутивную решетку с нулем и единицей [15, 16]) (отметим, что в этих соотношениях мы опускаем символ Ω, придаваемый символам $=, \bigcup, \bigcap, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ в соответствии с введенными выше определениями): $x \bigcup x = x$, $x \bigcap x = x$, $x \bigcup y = y \bigcup x$, $x \bigcap y = y \bigcap x$, $x \bigcup (y \bigcup z) = (x \bigcup y) \bigcup z$, $x \bigcap (y \bigcap z) = (x \bigcap y) \bigcap z$, $(x \bigcap y) \bigcup y = y$, $(x \bigcup y) \bigcap y = y$, $x \bigcap (y \bigcup z) = (x \bigcap y) \bigcup (x \bigcap z)$, $x \bigcup (y \bigcap z) = (x \bigcup y) \bigcap (x \bigcup z)$ $\mathbf{0} \bigcup x = x$, $\mathbf{0} \bigcap x = \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \bigcup x = \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \bigcap x = x$.

Во всякой АШИ Ω вводится предикат $\underset{\Omega}{\leqq}$ следующим образом: $x \underset{\Omega}{\leqq} y$ имеет место в том и только в том случае, когда $x \bigcup_\Omega y = y$ (или же $x \bigcap_\Omega y = x$; легко видеть, что оба указанных равенства эквивалентны). Предикат $\neg(x = y)$ будем обозначать посредством $x \underset{\Omega}{\neq} y$; предикат $(x \underset{\Omega}{\leqq} y) \& (x \underset{\Omega}{\neq} y)$ будем обозначать посредством $x \underset{\Omega}{<} y$.

Будем говорить, что АШИ Ω является <u>примитивно рекурсивной</u>, если множество $\mathbf{U}_\Omega$, предикат $\underset{\Omega}{=}$ и операции $\bigcup_\Omega$, $\bigcap_\Omega$ примитивно рекурсивны.

Символ Ω в обозначениях, введенных выше, будем иногда опускать. Простейшим примером АШИ является АШИ Ω_1; в этой АШИ $\mathbf{U}_\Omega$ есть двухэлементное множество, состоящее из чисел 0 и 1; предикат $=$ есть обычное равенство чисел из N; $x \bigcup y$ и $x \bigcap y$, суть соответственно $\max(x, y)$ и $\min(x, y)$, $\mathbf{0}$ есть 0 и $\mathbf{1}$ есть 1. Другой пример, а именно, АШИ Ω_2, получается на основе естественным образом определяемого взаимно-однозначного соответствия между множеством N и множеством всех двоично рациональных чисел вида $\frac{m}{2^n}$ (где $m \in N$, $n \in N$), удовлетворяющих условию $0 \le \frac{m}{2^n} \le 1$ (при подобном определении, например, числам $0,1,2,3,4,5,6,7$ и т.п. соответствуют числа $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ и т.п.). Если двоично-рациональное число, соответствующее числу $n \in N$, обозначить посредством $\Gamma(n)$, а обратное соответствие обозначить посредством Γ^{-1}, тогда $\mathbf{U}_\Omega$ есть N, $=$ есть равенство чисел из N; $x \bigcup y$ и

$x \bigcap y$, суть соответственно $\Gamma^{-1}(\max(\Gamma(x), \Gamma(y)))$ и $\Gamma^{-1}(\min(\Gamma(x), \Gamma(y)))$, $\mathbf{0}$ есть 0 и $\mathbf{1}$ есть 1. Аналогичным образом строится АШИ Ω_3, основанная на естественном взаимно-однозначном соответствии между некоторым подмножеством множества N и множеством предикатных формул [9, 10, 14]. Если формулу, соответствующую числу n, обозначить посредством $\Gamma(n)$, а обратное соответствие обозначить посредством Γ^{-1}, то тогда $\mathbf{U}_\Omega$ есть область определения $\Gamma(n)$, $x = y$ имеет место в том и только в том случае, когда формула $(\Gamma(x) \supset \Gamma(y)) \& (\Gamma(y) \supset \Gamma(x))$ выводима в H^{con}, $x \bigcup y$ (соответственно, $x \bigcap y$) есть $\Gamma^{-1}((\Gamma(x) \vee \Gamma(y)))$ (соответственно, $\Gamma^{-1}((\Gamma(x) \& \Gamma(y)))$), $\mathbf{0}$ (соответсвенно, $\mathbf{1}$) есть число, соответствующее какой-либо фиксированной формуле, опровержимой (соответственно, доказуемой) в H^{con}.

Отметим, что Ω_1 и Ω_2 являются примитивно рекурсивными, однако Ω_3 таковой не является (в частности, предикат равенства в Ω_3 является рекурсивно перечислимым, но не рекурсивным).

4. **Некоторые теоретико-алгоритмические понятия.** Обобщенным нечетким рекурсивно перечислимым множеством размерности $n \geq 1$ относительно АШИ Ω (сокращенно ОРПМ_Ω) будем называть рекурсивно перечислимое множество $(n+1)$-членных систем $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon)$, где $x_i \in N$ при $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon \in \mathbf{U}_\Omega$.

Замечание. Понятие ОРПМ_Ω является обобщением понятия нечеткого рекурсивного перечислимого множества (НРПМ), рассматриваемого в [8]. О соотношении между понятиями ОРПМ_Ω и НРПМ будет более подробно сказано ниже.

В дальнейшем при рассмотрении ОРПМ_Ω будем считать, что зафиксирована некоторая АШИ Ω, и все ОРПМ_Ω, о которых идет речь, относятся к этой АШИ. (Аналогичные соглашения предполагаются в дальнейшем при рассмотрении других объектов, связанных с АШИ). В соответствии с этим соглашением символ Ω в обозначении ОРПМ_Ω будем иногда опускать.

Говорим, что ОРПМ α размерности $n \geq 1$ относительно АШИ Ω <u>покрывает</u> ОРПМ β той же размерности относительно той же АШИ, если для всякой системы $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in \beta$, где $\varepsilon \underset{\Omega}{\neq} \mathbf{0}_\Omega$, можно указать $(x_1, x_2, ..., x_n, \delta) \in \alpha$, такую, что $\delta \underset{\Omega}{\geq} \varepsilon$.

Говорим, что ОРПМ α и β размерности n относительно АШИ Ω *эквивалентны*, если α покрывает β и β покрывает α. Отношение “ОРПМ α покрывает ОРПМ_Ω β” будем обозначать посредством

$\beta \underset{\Omega}{\subseteq} \alpha$ или $\beta \subseteq \alpha$; отношение "ОРПМ$_\Omega$ α и β эквивалентны" будем обозначать посредством $\alpha \underset{\Omega}{=} \beta$ или $\alpha = \beta$.

Говорим, что ОРПМ α размерности n является *монотонным*, если для любых систем $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon)$ и $(x_1, x_2, ..., x_n, \delta)$, таких, что $\varepsilon \underset{\Omega}{\leq} \delta$, оказывается: если $(x_1, x_2, ..., x_n, \delta) \in \alpha$, то $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in \alpha$.

Объединение $\alpha \bigcup\limits_{\Omega} \beta$ (соответственно, *пересечение* $\alpha \bigcap\limits_{\Omega} \beta$) ОРПМ α и ОРПМ β размерности n относительно АШИ Ω определяется как ОРПМ γ размерности n относительно Ω, такое, что $(x_1, x_2, ..., x_n, \eta) \in \gamma$ в том и только том случае, когда можно указать такие $\varepsilon \in \mathbf{U}_\Omega$ и $\delta \in \mathbf{U}_\Omega$, что $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in \alpha$, $(x_1, x_2, ..., x_n, \delta) \in \beta$, $\eta \underset{\Omega}{\leq} \varepsilon \bigcup\limits_{\Omega} \delta$ (соответственно, $\eta \underset{\Omega}{\leq} \varepsilon \bigcap\limits_{\Omega} \delta$).

Декартово произведение $\alpha \underset{\Omega}{\times} \beta$ ОРПМ α и β размерностей соответственно n и m относительно АШИ Ω определяется как ОРПМ γ размерности $n+m$ относительно Ω, такое, что $(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ... x_{n+m}, \eta) \in \gamma$ в том и только в том случае, когда можно указать такие $\varepsilon \in \mathbf{U}_\Omega$ и $\delta \in \mathbf{U}_\Omega$, что $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in \alpha$, $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}, \delta) \in \beta$, $\eta \underset{\Omega}{\leq} \varepsilon \bigcap\limits_{\Omega} \delta$.

Если α – ОРПМ размерности k относительно АШИ Ω, то его $\underline{n}$-я *декартова степень* α^k определяется как ОРПМ $\underbrace{\alpha \times \alpha \times ... \times \alpha}_{n\ раз}$ размерности $n \cdot k$ относительно Ω.

Проекция $\downarrow_i^n (\alpha)$ ОРПМ α размерности $n > 1$ по i-й координате, где $1 \leq i \leq n$, относительно АШИ Ω определяется как ОРПМ γ размерности $n-1$ относительно Ω, такое, что $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ... x_n, \varepsilon) \in \gamma$ в том и только том случае, когда $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ... x_n, \varepsilon) \in \alpha$ при некотором $x_i \in N$. Операцию построения проекции ОРПМ по координате x_i мы будем называть операцией *проектирования* ОРПМ по i-й координате (или просто операцией проектирования ОРПМ).

Посредством $\mathrm{V}_\Omega^{\mathrm{n}}$ будем обозначать ОРПМ α размерности n относительно АШИ Ω, такое, что $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in \alpha$ при любых $x_1, x_2, ..., x_n$ из N и любом $\varepsilon \in \mathbf{U}_\Omega$. Посредством $\Lambda_\Omega^{\mathrm{n}}$ будем обозначать ОРПМ β

размерности n относительно АШИ Ω, такое, что при любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из N соотношение $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \in \beta$ имеет место в том и только том случае, когда $\varepsilon \underset{\Omega}{=} \mathbf{0}_\Omega$. В дальнейшем индекс Ω в обозначениях $\alpha \bigcup_{\Omega} \beta$, $\alpha \bigcap_{\Omega} \beta$, $\alpha \overset{\times}{\underset{\Omega}{}} \beta$, V_Ω^n, Λ_Ω^n, а также в иных аналогичных обозначениях будем иногда опускать.

Говорим, что для ОРПМ α размерности n относительно АШИ Ω i-я переменная x_i (где $1 \le i \le n$) является *фиктивной*, если соотношение $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) \in \alpha$ при фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n, \varepsilon$ либо имеет место при любых $x_i \in N$, либо не имеет места ни при каких $x_i \in N$.

Генерализация $\uparrow_i^n(\alpha)$ ОРПМ α размерности n по i-й координате, где $1 \le i \le n$, относительно АШИ Ω определяется как ОРПМ γ размерности n относительно Ω, такое, что $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n, \varepsilon) \in \gamma$ в том и только том случае, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n, \varepsilon) \in \downarrow_i^n(\alpha)$ (если $n = 1$, то $\uparrow_1^1(\alpha) = \mathrm{V}_\Omega^1$ при $\alpha \ne \Lambda_\Omega^1$ и $\uparrow_1^1(\alpha) = \Lambda_\Omega^1$ при $\alpha = \Lambda_\Omega^1$). Таким образом, генерализация α по i-й координате получается из проекции $\downarrow_i^n(\alpha)$ посредством добавления фиктивной переменной x_i.

Операция *транспозиции* T_{ij}^n i-й и j-й координат в ОРПМ α размерности n относительно АШИ Ω, где $1 \le i, j \le n$ (иначе говоря, *перестановки* i-й и j-й переменных), а также операция *подстановки переменных* Sub_{ij}^n в ОРПМ α размерности n относительно АШИ Ω, где $1 \le i, j \le n$ (иначе говоря, операция *подстановки* j-й переменной вместо i-й переменной в α) определяется естественным образом в точной аналогии с соответствующими определениями из [8] (см.[8], с. 42).

5. **Идеалы. ОРПМ-идеалом** размерности n относительно АШИ Ω будем называть любое непустое конструктивное множество Δ монотонных ОРПМ_Ω размерности n, обладающее следующими свойствами (ср. [8], с. 46):

(1) если $\alpha \in \Delta$ и $\beta \subseteq \alpha$, то $\beta \in \Delta$;

(2) если $\alpha \in \Delta$ и $\beta \in \Delta$, то $\alpha \bigcup \beta \in \Delta$.

ОРПМ-идеал Δ размерности n относительно АШИ Ω будем называть *главным*, если можно указать такое монотонное ОРПМ β, что $\alpha \in \Delta$ в том и только том случае, когда $\alpha \underset{\Omega}{\subseteq} \beta$. ОРПМ-идеал Δ указанного типа будем называть *нулевым*, если $\alpha \in \Delta$ в том и только том случае, когда $\alpha = \Lambda_\Omega^n$; этот идеал будем называть *полным*, если $\mathrm{V}_\Omega^n \in \Delta$.

6. **Предикатные формулы.** Будем рассамтривать предикатные формулы, построенные из элементарных формул посредством логических операций $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$, не содержащие функциональных символов и символов предметных констант [7-10, 12]. Считаем, что в числе предикатных формул фигурируют также символ истинности $\boldsymbol{T}$ и символ ложности $\boldsymbol{F}$. Полагаем, что в языке предикатных формул имеется бесконечное число предикатных символов каждой размерности $k \geq 1$. Предикатные формулы будем обозначать буквами A, B, C, D (быть может, с индексами).

Полагаем, что зафиксирована последовательность $x_1, x_2, \ldots$, состоящая из всех различных предметных переменных рассматриваемого языка предикатных формул. *Индексной мажорантой* формулы A будем называть любое число $k \in N$, большее или равное максимуму индексов i всех предметных переменных (как свободных, так и связанных), входящих в A, а также[1)] размерностей всех предикатных символов, входящих в A.

7. **Интерпретации предикатных формул**. Пусть A – предикатная формула, не содержащая иных предикатных символов, кроме $p_1, p_2, \ldots, p_l$ с размерностями, соответственно, $k_1, k_2, \ldots, k_l$. *ОНКЛ-распределением* для формулы A относительно АШИ Ω будем называть соответствие, при котором каждому предикатному символу p_i (где $1 \leq i \leq l$) размерности k_i ставится в соответствие некоторый ОРПМ-идеал относительно Ω, имеющий размерность k_i. ОНКЛ-распределение относительно Ω будем называть *главным*, если все ОРПМ-идеалы, поставленные в соответствие предикатным символам $p_1, p_2, \ldots, p_l$, являются главными ОРПМ-идеалами.

Пусть k – индексная мажоранта формулы A. *ОНКЛ – интерпретация* формулы A относительно АШИ Ω, ОНКЛ-распределения φ и индексной мажоранты k (мы будем в дальнейшем обозначать эту интерпретацию посредством $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(A)$) определяется как некоторый ОРПМ-идеал размерности k при помощи индукции по построению подформул формулы A. Если B – элементарная подформула формулы A, имеющая вид $p_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, где $1 \leq i \leq l$, $m = k_i$, то $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(B)$ есть ОРПМ-идеал Δ'', получаемый при помощи следующих построений: вначале исходя из ОРПМ-идеала Δ размерности m, сопоставленного предикатному символу p_i в соответствии с распределением φ, строится ОРПМ-идеал Δ', которому принадлежат все ОРПМ β, удовлетворяющие условию $\beta \subseteq \alpha \times \mathrm{V}_{\Omega}^{\mathrm{k\text{-}m}}$ при каком-либо $\alpha \in \Delta$ (это соответствует добавлению $k - m$ фиктивных переменных во все ОРПМ α); после этого искомый ОРПМ-

[1)] В этом месте в тексте статьи [8] допущена ошибка: из указанного определения выпала последняя часть (“а также размерностей всех предикатных символов, входящих в A”) (см. [8], с. 49-50).

идеал Δ'' строится исходя из Δ' при помощи операций T_{ij}^{k} и Sub_{ij}^{k}, применяемых ко всем $\alpha \in \Delta'$ таким образом, чтобы все предметные переменные, входящие в рассматриваемую предикатную формулу $p_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$, оказались на своих местах в соответствии со структурой этой формулы (заметим, что указанные построения проводятся в точной аналогии с построениями, рассмотренными в [8] на с. 50-51). Если подформула B формулы A имеет вид $\boldsymbol{T}$ или $\boldsymbol{F}$, то $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(B)$ есть, соответственно, полный или нулевой ОРПМ-идеал. ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(B \vee C)$ (соответственно, $\Pi_{\Omega,\phi,k}(B \& C)$) определяется как множество всех монотонных ОРПМ вида $\beta \bigcup \gamma$ (соответственно, $\beta \bigcap \gamma$), где $\beta \in \Pi_{\Omega,\varphi,k}(B)$, $\gamma \in \Pi_{\Omega,\phi,k}(C)$. ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\phi,k}(B \supset C)$ определяется как множество всех монотонных ОРПМ ω, удовлетворяющих следующему условию: для любого монотонного k- мерного ОРПМ $\beta \in \Pi_{\Omega,\varphi,k}(B)$ оказывается: $\beta \bigcap \omega \in \Pi_{\Omega,\varphi,k}(C)$. ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(\exists x_i(B))$ определяется как множество всех монотонных ОРПМ ω, удовлетворяющих условию $\omega \subseteq \uparrow_i^k (B)$ при некотором $\beta \in \Pi_{\Omega,\phi,k}(B)$. ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\phi,k}(\forall x_i(B))$ определяется как множество всех монотонных ОРПМ ω, удовлетворяющих условию $\uparrow_i^k (\omega) \in \Pi_{\Omega,\varphi,k}(B)$. ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\varphi,k}(\neg B)$ определяется как $\Pi_{\Omega,\phi,k}(B \supset \boldsymbol{F})$. Указанными условиями, как легко видеть, определяются ОНКЛ-интерпретации относительно Ω, φ, k для всех подформул формулы A, в том числе и для A.

8. **Общезначимость** *предикатных формул*. Будем говорить, что предикатная формула A является *сильно ОНКЛ-общезначимой* (соответственно, *слабо ОНКЛ-общезначимой*) относительно АШИ Ω, если для любого ОНКЛ-распределения φ (соответственно, для любого главного ОНКЛ-распределения φ) и для любой достаточно большой индексной мажоранты k формулы A ОРПМ-идеал $\Pi_{\Omega,\varphi,k}$ является полным ОРПМ-идеалом.

Теорема 8.1. *Какова бы ни была АШИ Ω, любая предикатная формула указанного выше вида, выводимая в H^{con}, является сильно ОНКЛ-общезначимой относительно Ω.*

Теорема 8.2. *Какова бы ни была АШИ Ω, следующие формулы*

(а) $p(x_1) \vee \neg p(x_1)$;

(б) $(p(x_1) \supset (q(x_1) \vee r(x_1))) \supset ((p(x_1) \supset q(x_1)) \vee (p(x_1) \supset r(x_1)))$;

(в) $\forall x_2(p(x_1) \vee q(x_1, x_2)) \supset (p(x_1) \vee \forall x_2 q(x_1, x_2))$,

не являются слабо ОНКЛ-общезначимыми (тем более, сильно ОНКЛ-общезначимыми) относительно Ω.

Замечание. Понятиям НКЛ*-общезначимости и ТКЛ-общезначимости предикатных формул, рассмотренным в [8], соответствуют в рамках аппарата обобщенной нечеткой конструктивной логики понятия ОНКЛ-общезначимости относительно, соответственно, АШИ Ω_2 и Ω_1 – с некоторыми техническими изменениями. Эти изменения в основном сводятся к следующему. Прямые аналоги понятий открытого НРПМ, покрываемости и эквивалентности НРПМ, рассмотренных в [8], отсутствуют в системе понятий, введенных выше. Понятия покрываемости и эквивалентности ОРПМ, определенные выше, соответствуют понятиям сильной покрываемости и сильной эквивалентности НРПМ, рассматриваемым в [8]. Понятие монотонного ОРПМ в системе определений, рассматриваемых выше, играет такую же роль, как понятие открытого НРПМ в системе определений из [8].

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Член-корреспондент НАН РА И. Д. Заславский

Обобщенная нечеткая конструктивная логика

Рассматривается система нечеткой конструктивной логики, в которой логические значения образуют частично упорядоченное множество. Вводится понятие алгоритмической шкалы истинности (сокращенно АШИ), и на его основе строится логическая система обобщенной нечеткой конструктивной логики (сокращенно ОНКЛ), в частности, вводятся понятия сильной и слабой ОНКЛ-общезначимости предикатных формул относительно данной АШИ. Устанавливается, что всякая формула определенного вида, выводимая в конструктивном (интуиционистском) исчислении предикатов, является сильно ОНКЛ-общезначимой относительно любой АШИ. С другой стороны, для некоторых предикатных формул (общезначимых в классической логике) устанавливается, что относительно любой АШИ эти формулы не являются слабо ОНКЛ-общезначимыми.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ի. Դ. Զասլավսկի

Ընդհանրացված ոչ պարզորոշ կոնստրուկտիվ տրամաբանություն

Դիտարկվում է ոչ պարզորոշ կոնստրուկտիվ տրամաբանության համակարգ, որտեղ տրամաբանական արժեքները կազմում են մասնակի կարգավորված բազմություն: Սահմանվում է ճշմարտության ալգորիթմական սանդղակի գաղափարը (կարճ, Ա-սանդղակ), և այդ գաղափարի հիման վրա կառուցվում է ընդհանրացված ոչ պարզորոշ կոնստրուկտիվ տրամաբանության համակարգ: Մասնավորապես սահմանվում են պրեդիկատային բանաձևերի ուժեղ և թույլ նույնաբար ճշմարտության գաղափարները տվյալ Ա-սանդղակի նկատմամբ: Ապացուցվում է, որ կոնստրուկտիվ (ինտուիցիոնիստական) պրեդիկատային հաշվում արտածվող որոշակի տիպի յուրաքանչյուր պրեդիկատային բանաձև նույնաբար ճշմարիտ է ուժեղ իմաստով ցանկացած Ա-սանդղակի նկատմամբ: Մյուս կողմից ապացուցվում է, որ որոշ պրեդիկատային բանաձևեր (որոնք նույնաբար ճշմարիտ են դասական տրամաբանության տեսակետից) նույնաբար ճշմարիտ չեն թույլ իմաստով ցանկացած Ա-սանդղակի նկատմամբ:

Corresponding member of NAS RA I. D. Zaslavsky

Generalized Fuzzy Constructive Logic

A system of fuzzy constructive logic is considered in which the truth values are partially ordered. The notion of algorithmic scale of truth values (shortly, A-scale) is introduced; and on the base of it logical system of generalized fuzzy constructive logic is developed. The classes of identically true predicate formulas in strong and weak sense concerning a given A-scale are introduced. It is proved that any predicate formula of some kind deducible in the constructive (intuitionistic) predicate calculus is identically true in the strong sense concerning any A-scale. From the other side it is proved that some predicate formulas (which are identically true from the classical point of view) are not identically true in the weak sense concerning any A-scale.

Литература

1. *Zadeh L.* – Information and Control. 1965. V. 8. P. 338-353.
2. *Yen J., Langari R.* Fuzzy Logic, Intelligence, Control, and Information. Prentice Hall, upper Saddle River. New Jersey. 1999.
3. *Novak V., Perfilieva I., Mockor J.* Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers. 1999.
4. *Марков А. А.* – Труды МИАН СССР. 1962. Т. 67. С. 8-14.
5. *Шанин Н. А.* – Труды МИАН СССР. 1962. Т. 67. С. 15-294.
6. *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М. Наука. 1973. 448 с.
7. *Заславский И. Д.* – Записки научных семинаров ПОМИ РАН. 2008. Т. 358. С. 130-152.
8. *Заславский И. Д.* – Записки научных семинаров ПОМИ РАН. 2012. Т. 407. С. 35-76.
9. *Kleene S. C.* Introduction to Metamathematics. D. van Nostrand Comp., Inc., New York-Toronto. 1952.
10. *Mendelson E.* Introduction to Mathematical Logic. D. van Nostrand Comp., Inc., Princeton, New Jersey-Toronto-New York-London. 1964.
11. *Rogers H.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. Mc. Graw Hill Book Comp., New York-St. Louis-San Francisco-Toronto-London-Sydney. 1967.
12. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М. Наука. 1986.
13. *Марков А. А.* – Труды 3-го Всесоюзн. мат. съезда. 1956. Т. 2. С. 146-147.
14. *Troselstra A. S., Schwichtenberg H.* Basic Proof Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York. 2000.
15. *Бирхгоф Г.* Теория решеток. М. Наука. 1984.
16. *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. М. Наука. 1972.