ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517

М. В. Кукушкин

Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной

(Представлено академиком В. С. Захаряном 8/VI 2015)

Ключевые слова: *краевая задача, дробная производная, линейное дифференциальное уравнение.*

Введение. Обобщенная краевая задача для линейного дифференциального уравнения подробно изучена в [1]. В работе [2] разрешается вопрос существования и единственности решения уравнения второго порядка с дробной производной в случае, когда одним из условий является непрерывность коэффициента при дробной производной. В работе [3] получен ряд достаточных условий существования априорной оценки решения данного уравнения при разных предположениях относительно коэффициента при дробной производной. В данной работе рассмотрена обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка, а также получены условия существования разрешимого расширения оператора рассматриваемого уравнения. Найдены условия на коэффициент, при которых имеют место энергетические неравенства. Если это не оговорено дополнительно, везде будем полагать $\alpha\in(0,1), x\in G.$ Не ограничивая общности, в одномерном случае будем полагать $G:\{x\in(0,r)\}.$ Интегрирование будем понимать в смысле Лебега. Будем использовать обозначения:

$$\|\cdot\|_0=\|\cdot\|_{L_2(G)}, < f,g >_0=< f,g >_{L_2(G)},$$
$$< f,g >_{W_2^2(G)}, < f,g >_+=< f,g >_{W_2^2(G)}.$$

E^n – евклидово n-мерное пространство,

$W_p^l(G)$ – пространство Соболева или пополнение $C^l(\overline{G})$ по норме

$$\|u\|_{W_p^l(G)}=\sum_{|\alpha|\le l}\|D^\alpha u\|_{L_p(G)},\ (p>1),\text{ где}$$

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\}\ \alpha_i\in\mathbb{N}\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n,$$

$\mathcal{D}^{\alpha}(\cdot)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ – обобщенная производная Соболева порядка $|\alpha|$.

$\mathcal{D}(\cdot)$ – обобщенная производная Соболева первого порядка в одномерном случае, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(G)$ – подпространство пространства $W_p^l(G)$, полученное замыканием в $W_p^l(G)$ множества $C_0^{\infty}(G)\in W_p^l(G)$.

$W_2^l(bound)$ – подпространство функций из $W_2^l(G)$, содержащее $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$, будем называть подпространством функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям ($bound$), $W_2^l(bound)^+$ – совокупность всех функций $v\in W_2^l(G)$, для которых при любом $u\in W_2^l(bound)$ выполняется равенство (4).

Рассмотрим выражения:

$$Lu=D^2u(x)-c(x)D_{0x}^{\alpha}u(t)\,, \tag{1}$$

$$L^{+}u=D^2u(x)-\partial_{rx}^{\alpha}c(t)u(t)\,, \tag{2}$$

$$c(x)\in AC(\bar{G})\,. \tag{3}$$

Выражение L^+ назовем сопряженным к L выражением. Поскольку в силу теоремы вложения (см. [1], с. 31) в случае ограниченной области $G\subset E^n$ с кусочно-гладкой границей Γ из

$$0\le k<l-\frac{n}{p} \text{ следует } W_p^l(G)\subset C^k(\bar{G})\,,$$

причем оператор вложения пространства $W_p^l(G)$ в пространство $C^k(\bar{G})$ непрерывен, соответственно в одномерном случае имеем:

$$W_2^2(G)\subset C^1(\bar{G})\,,\ \|u'\|_{C(\bar{G})}\le M\|u\|_+\,,\ u(x)\in W_2^2(G)\,,\ M=\text{const}\,.$$

Из вышесказанного следует, что в одномерном случае оператор Римана – Лиувилля при $\alpha\in(0,1)$ определен на всем $W_2^2(G)$.

Пусть $v(x)\in C_0^{\infty}(G), u(x)\in W_2^2(G)$. Поскольку имеет место включение $C_0^{\infty}(G)\subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ и для $u(x)\in W_2^2(G)$ имеет место $Du\in W_2^1(G)$, то согласно [4] (с. 324), применяя формулу интегрирования по частям, несложно получить следующее равенство:

$$\langle Lu,v\rangle_0-\langle u,L^+v\rangle_0=[u'(x)v(x)-v'(x)u(x)-c(x)v(x)D_{0x}^{\alpha-1}u(t)]\,|_0^r\,.$$

Учитывая, что $v(x)\in C_0^{\infty}(G)$, имеем

$$\langle Lu,v\rangle_0=\langle u,L^+v\rangle_0. \tag{4}$$

Рассмотрим выражение (1) с предположениями (3) относительно $c(x)$. Определим оператор Λ' в $L^2(G)$ со всюду плотной областью определения

$$\Lambda'u=Lu,\quad D(\Lambda')=C_0^{\infty}(G). \tag{5}$$

Покажем, что этот оператор допускает замыкание. Требуется показать, что из $u_n \in D(\Lambda'), \|u_n\|_0 \to 0 \, \|\Lambda' u_n - f\|_0 \to 0 \, (f \in L_2(G))$, следует что $f = 0$.

Пусть $u_n(x) \in C_0^\infty(G), \|u_n\|_0 \to 0$, и $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ $(f \in L_2(G))$, тогда согласно (4) $\forall v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем равенства:

$$\langle f, v \rangle_0 = \lim \langle \Lambda' u_n, v \rangle_0 = \lim \langle Lu_n, v \rangle_0 = \lim \langle u_n, L^+ v \rangle_0 = 0.$$

Поскольку $C_0^\infty(G)$ является линейным многообразием, всюду плотным в $L_2(G)$, то согласно лемме 2 в [5] (с. 88) не существует элемента $L_2(G)$, отличного от нулевого и ортогонального всем элементам данного многообразия. Следовательно, $f \equiv 0$ и оператор Λ' допускает замыкание. Обозначим $\Lambda \equiv \overline{\Lambda}'$ минимальный оператор, порожденный выражением L. Совершенно аналогичным образом построим оператор Λ^+ по формально сопряженному выражению L^+, причем доказательство того, что оператор допускает замыкание, совершенно аналогично.

Покажем, что $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subset D(\Lambda)$ Пусть $\zeta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, тогда $\exists \{v_n(x)\} \in C_0^\infty(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n(x) - \zeta(x)\|_+ = 0$. Покажем, что последовательность $\{Lv_n(x)\}$ фундаментальна в $L_2(G)$. Рассмотрим

$$\|Lv_{n+p}(x) - Lv_n(x)\|_0 = \left\|(v_{n+p}(x) - v_n(x))'' - c(x) D_{0x}^{\alpha-1}(v_{n+p}(t) - v_n(t))'\right\|_0 \le$$
$$\le \left\|(v_{n+p}(x) - v_n(x))''\right\|_0 + \|c(x)\|_{L_\infty} \left\|D_{0x}^{\alpha-1}(v_{n+p}(t) - v_n(t))'\right\|_0 \le$$
$$\le \left\|(v_{n+p}(x) - v_n(x))''\right\|_0 + \mu \|K(x)\|_{L_1} \left\|(v_{n+p}(x) - v_n(x))'\right\|_0, \qquad (6)$$

где $\mu = \mathrm{const}$, $K(x) = x^{-\alpha}$. В [6] (с. 383) показано, что последнее неравенство имеет место. Учитывая сходимость в L_2 последовательностей: $\{v_n(t)'\}$, $\{v_n(t)''\}$, из последнего неравенства следует фундаментальность $\{Lv_n(x)\}$ в $L_2(G)$, а так как $L_2(G)$ – полное пространство, то $\exists \varphi(x) \in L_2(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Lv_n(x) - \varphi(x)\|_0 = 0$. Положив $\Lambda\zeta(x) = \varphi(x)$, получим значение оператора Λ в каждой точке $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$. С помощью аналогичных рассуждений несложно показать, что $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subset D(\Lambda^+)$.

Положим $(\Lambda^+)^* = \Omega$. Если пользоваться терминологией, используемой в [1] (с. 94), то Ω носит название максимального оператора, порожденного L. Покажем, что $\Lambda \subseteq \Omega$.. Для $u(x) \in D(\Lambda), u_n(x), v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем

$$\langle \Lambda u(x), v(x) \rangle_0 = \lim_{n\to\infty} \langle Lu_n(x), v(x) \rangle_0 = \lim_{n\to\infty} \langle u_n(x), L^+ v(x) \rangle_0 = \langle u(x), L^+ v(x) \rangle_0$$

откуда следует, в силу теоремы 3 (см. [7], с. 557):

$$\Lambda \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = \Omega \qquad (7)$$

Покажем, что оператор L, определяемый соответствием $u \to Lu\ (u \in W_2^2(G))$, является частью $\Omega : L \subseteq \Omega$. Действительно, при $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in C_0^\infty(G)$ имеем $\langle Lu, v\rangle_0 = \langle u, L^+ v\rangle_0 = \langle u, (\Lambda^+)' v\rangle_0$, откуда следует $L \subseteq \subseteq ((\Lambda^+)')^* = (\Lambda^+)^* = \Omega.$

Разрешимое расширение оператора L. Рассмотрим краевую задачу с граничным условием *(bound)*, определяемым $W_2^2(bound)$

$$Lu = f,\ u \in (bound). \tag{8}$$

Решением задачи (8) является функция $u \in W_2^2(bound)$, удовлетворяющяя уравнению (8). Такое решение называется гладким. Поскольку согласно [1] (с. 94) для линейного дифференциального оператора не существует эффективных методов нахождения условий существования данного решения, то для оператора L, как и для линейного дифференциального оператора актуальным становится введение понятия обобщенного решения.

Положим, что между Λ и Ω в (7) можно вставить оператор L, являющийся расширением Λ и сужением Ω и такой, что L^{-1} определен во всем $L^2(G)$ и непрерывен:

$$\Lambda \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega. \tag{9}$$

Используя смысл такого определения, под обобщенной краевой задачей для уравнения $Lu = f$ можно понимать операторное уравнение

$$Lu = f \in L_2(G), \tag{10}$$

а под ее решением $u = L^{-1} f$. Принадлежность u к $D(L)$ следует воспринимать как наложение некоторого граничного условия на обобщенные решения уравнения $Lu = f$, не имеющего вид *(bound)*. Классическое решение задачи (8), если оно существует при всех $f \in L_2(G)$ и непрерывно от них зависит, будет и обобщенным в этом смысле. Приведенный выше оператор L называется разрешимым расширением оператора Λ.

Почти корректные граничные условия относительно оператора L. Рассмотрим выражение L вида (1) и множество

$$u(x) : u(x) \in W_2^2(G),\ (u(\Gamma) = 0). \tag{11}$$

Покажем, что в силу теоремы вложения данное множество замкнуто в $W_2^2(G)$, это следует из оценки

$$\|u - u_n\|_{C(\bar{G})} \le \|u - u_n\|_+ \qquad u_n \in W_2^2(G), u_n(\Gamma) = 0,$$

откуда следует $u(\Gamma) = 0$. Следовательно, данное множество является подпространством $W_2^2(G)$, также очевидно, что данное подпространство включает $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, а значит является $W_2^2(bound)$. Соответствие $u \to Lu$ $(u \in W_2^2(bound))$ задает оператор в $L_2(G)$, который обозначим $\Lambda'(bound)$. Так как $\Lambda'(bound) \subseteq \Omega$, а Ω замкнут, то $\Lambda'(bound)$ допускает замыкание $\Lambda(bound)$. Этот последний оператор согласно [1] (с. 97) будем называть сильным оператором задачи (8). Найдем по данному $W_2^2(bound)$ множество $W_2^2(bound)^+$ в силу равенства (4) $W_2^2(bound)^+ = W_2^2(bound)$. Заметим, что можно доказать замкнутость $W_2^2(bound)^+$, не отождествляя данное множество с $W_2^2(bound)$. Поскольку в силу рассуждений, аналогичных (6), из сходимости $v_n(x) \to v(x)$ в $W_2^2(G)$ следует сходимость $L^+ v_n \to L^+ v$ в $L_2(G)$, то, осуществив предельный переход в (4), получим замкнутость совокупности $W_2^2(bound)^+$ в $W_2^2(G)$. Это очевидно, и поскольку (4) выполняется при любых $u(x) \in W_2^2(G)$, $v(x) \in C_0^\infty(G)$, то $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G) \subseteq W_2^2(bound)^+$.

Следовательно, $W_2^2(bound)^+$ является подпространством $W_2^2(G)$, содержащим $\overset{\circ}{W}{}_2^2(G)$, т.е. является подпространством функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям $(bound)^+$. Граничные условия $(bound)^+$ будем называть сопряженными к $(bound)$. Положим $\Omega(bound) = (\Lambda^+(bound)^+)^*$, где $\Lambda^+(bound)^+$ обозначает сильный оператор сопряженной задачи

$$L^+ v = f, \ v \in (bound)^+. \tag{12}$$

Оператор $\Omega(bound)$ назовем слабым оператором задачи (8). Покажем, что имеют место включения:

$$\Lambda \subseteq \Lambda(bound) \subseteq \Omega(bound) \subseteq \Omega. \tag{13}$$

Очевидно, что $\Lambda \subseteq \Lambda(bound)$, аналогично $\Lambda^+ \subseteq \Lambda^+(bound)^+$, откуда согласно теореме 2 из [7] (с. 557)

$$\Omega = (\Lambda^+)^* \supseteq (\Lambda^+(bound)^+)^* = \Omega(bound).$$

Покажем среднее включение. Заметим, что $W_2^2(bound) \subseteq D(\Lambda(bound))$. Учтя теорему вложения и рассуждения (6), легко убедиться, что это так. Для $u \in W_2^2(bound) \subseteq D(\Lambda(bound))$ при любом $v \in W_2^2(bound)^+ = D(\Lambda^{+'}$ $(bound)^+)$ имеем

$$\langle \Lambda(bound)u, v\rangle_0 = \langle Lu, v\rangle_0 = \langle u, L^+ v\rangle_0 = \langle u, \Lambda^{+'}(bound)^+ v\rangle_0, \text{ откуда}$$

$$\Lambda(bound) \subseteq (\Lambda^{+'}(bound)^+)^* = (\Lambda^+(bound)^+)^* = \Omega(bound).$$

Утверждение доказано.

Теорема 1 ([1], с. 97). *Для того чтобы для* L *и* (bound) *существовало разрешимое расширение* L *такое, что*

$$\Lambda(bound) \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega(bound), \tag{14}$$

необходимо и достаточно выполнение двух энергетических неравенств:

$$\|Lu\|_0 \geq C\|u\|_0, \ \|L^+ v\|_0 \geq C\|v\|_0 \tag{15}$$

$$C > 0, \ u \in W_2^2(bound), v \in W_2^2(bound)^+.$$

С краевой задачей (8), где $f \in L_2(G)$, связывают четыре типа решений:

1) гладкое решение – функция $u \in W_2^2(bound)$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$;

2) сильное решение – функция $u \in D(\Lambda(bound))$, удовлетворяющая равенству $\Lambda(bound)u = f$;

3) полусильное решение – функция $u \in D(\mathrm{L})$, удовлетворяющая равенству $Lu = f$, где $L-$ разрешимый оператор, такой, что $\Lambda(bound) \subseteq L \subseteq \Omega(bound)$;

4) слабое решение – функция $u \in D(\Omega(bound))$, удовлетворяющая равенству $\Omega(bound)u = f$.

Каждое из этих решений является и решением любого последующего типа, но не наоборот. Теорема 1 дает возможность установить, когда существует один из перечисленных типов решений.

Для существования слабого решения при любом $f \in L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение второго из неравенств (15). Заметим, что слабое решение можно определить эквивалентным образом: $u \in L_2(G)$ – слабое решение задачи (8), если

$$\langle u, L^+ v\rangle_0 = \langle f, v\rangle_0 \quad (v \in W_2^2(bound)^+). \tag{16}$$

Первое из неравенств (15) дает непрерывную зависимость сильного решения от f, но не дает его существования при любом $f \in L_2(G)$. Предположим, что выполняются оба неравенства (15). Такие *(bound)* мы будем называть почти корректными относительно L. Как следует из теоремы 1, это необходимое и достаточное условие существования при любом $f \in L_2(G)$ полусильного решения, в этом случае при любой $f \in L_2(G)$ существует слабое решение и непрерывно зависит сильное.

Основная теорема. Применим изложенный выше метод, позволяющий установить существование разрешимого расширения оператора, в общем не обязательно дифференциального, для случая, когда вышеуказанным оператором является оператор, определяемый выражением (1). Покажем, что существуют условия на коэффициент при дробной производной, при которых *(bound)* (11), рассмотренные в разделе 3, являются почти корректными относительно L, и в силу теоремы 1 существует для L и *(bound)* разрешимое расширение L такое, что

$$\Lambda(bound) \subseteq \mathrm{L} \subseteq \Omega(bound).$$

Лемма 2. *Пусть* $c(x) \in AC[0,r], c(x) > 0, c'(x) \le 0$. *Тогда* $\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge \ge 0$.

Для доказательства нам потребуется результат, который аналогично следует из доказательства леммы 1 работы [9]

Пусть $v(x) \in AC[0,r], \alpha \in (0,1)$, тогда

$$v(x)\partial_{rx}^{\alpha} v(t) \ge \frac{1}{2}\partial_{rx}^{\alpha} v^2(t).$$

По определению

$$v(x)\partial_{rx}^{\alpha}v(t)-\frac{1}{2}\partial_{rx}^{\alpha}v^2(t)=sign(x-r)v(x)D_{rx}^{\alpha-1}v'(t)-sign(x-r)D_{rx}^{\alpha-1}v(t)v'(t)=$$

$$=\frac{sign(x-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\left[\int_x^r\frac{v(x)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

Мы получим желаемое, если покажем, что выражение в скобках не положительно. Рассмотрим

$$\int_x^r\frac{v(x)v(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt=\int_x^r\frac{v'(t)[v(x)-v(t)]}{(t-x)^{\alpha}}dt\ .$$

Ввиду абсолютной непрерывности $v(x)$ можно, применив формулу Ньютона–Лейбница, представить подынтегральное выражение в скобках в виде интеграла

$$\int_x^r\frac{v'(t)[v(x)-v(t)]}{(t-x)^{\alpha}}dt=\int_x^r\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\int_t^x v'(\eta)d\eta dt.$$

Пользуясь теоремой Фубини, изменим порядок интегрирования, затем, осуществив преобразования, имеем

$$=\int_x^r v'(\eta)\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dtd\eta=\int_x^r(\eta-x)^{\alpha}\frac{v'(\eta)}{(\eta-x)^{\alpha}}\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dtd\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\int_x^r(\eta-x)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2d\eta=-\frac{\alpha}{2}\int_x^r(\eta-x)^{\alpha-1}\left(\int_r^{\eta}\frac{v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right)^2d\eta\le 0,$$

следовательно

$$\frac{sign(x-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\left[\int_x^r\frac{v(x)v(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt-\int_x^r\frac{v(t)v'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right]\ge 0.$$

Доказательство неравенства завершено.

Учтя доказаное неравенство, будем иметь следующие рассуждения:

$$\langle v,\partial_{rx}^{\alpha}c(t)v(t)\rangle_0=\int_0^r\frac{1}{c(x)}v(x)c(x)\partial_{rx}^{\alpha}c(t)v(t)dx\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{c(x)}\partial_{rx}^{\alpha}[c(t)v(t)]^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^r\frac{1}{c(x)}\frac{\partial}{\partial x}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{c(x)}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2\,|_0^r-\frac{1}{2}\int_0^r\frac{c'(x)}{c(x)^2}D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2dx\ge 0.$$

Последнее равенство возможно, поскольку в силу [10] (с. 40) $D_{rx}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2\in AC[0,r]$, и так как

$$D_{r0}^{\alpha-1}[c(t)v(t)]^2=\frac{sign(0-r)}{\Gamma(-\alpha+1)}\int_r^0\frac{[c(t)v(t)]^2}{t^{\alpha}}dt=\frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}\int_0^r\frac{[c(t)v(t)]^2}{t^{\alpha}}dt\ge 0,$$

то ввиду очевидной неотрицательности второго слагаемого в последней строке предыдущего неравенства в случае, когда $c'(x) \le 0$, можем заключить, что

$$\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge 0.$$

Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть в выражениях (1), (2)* $c(x) \in AC(\overline{G}), c(x) > 0,$ $c'(x) \le 0,\ \ (x \in \overline{G}).$ *Тогда граничные условия (bound) (11) являются почти корректными относительно* L. *Для* L *и (bound) существует разрешимое расширение, т. е. существует оператор* L, *удовлетворяющий (14) и имеющий непрерывный обратный определенный во всем* $L_2(G)$.

По условию данной теоремы $c(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1 работы [3], следовательно, имеем $\langle u(x), D_{0x}^{\alpha} u(t)\rangle_0 \ge 0.$ Домножив левую и правую части выражения (1) на $u(x)$ и положив $u \in W_2^2(bound)$, имеем

$$< u(x), D^2 u(x) >_0 - < u(x), c(x) D_{0x}^{\alpha} u(t) >_0 = < Lu(x), f(x) >_0 .$$

Заметим, что из $u \in W_2^2(bound)$ следует $\mathcal{D}u \in W_2^1(G),$ далее согласно утверждению (см. [1], с. 87) подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ совпадает с совокупностью тех функций из $W_2^1(G)$, которые аннулируются на Γ, следовательно $u \in W_2^2(bound) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(G),$ и согласно [4] (с. 324) имеет место формула интегрирования по частям

$$< u(x), D^2 u(x) >_0 = \int_0^r u(x) D^2 u(x) dx = -\int_0^r [Du(x)]^2 dx = -\| Du \|_0^2 = -\| u' \|_0^2 .$$

Последнее равенство имеет место, поскольку в силу теоремы вложения (см. [1], с. 31) $u \in C^1(\overline{G})$. Далее полностью аналогично [3] имеем для любого $k > 0$:

$$\|u\|_0^2 \le r^2 \| u' \|_0^2 \le \frac{kr^2}{2} \|u\|_0^2 + \frac{r^2}{2k} \| Lu \|_0^2 .$$

Положив $k = \dfrac{1}{r^2}$, получим первое неравенство (15)

$$\|Lu\|_0 r^2 \ge \|u\|_0 \ \ (u(x) \in W_2^2(bound)).$$

Покажем, что второе неравенство (15) тоже выполняется. Согласно лемме 2 при условиях данной теоремы на $c(x)$ и при $v \in W_2^2(bound)^+$ имеем

$$\langle v, \partial_{rx}^{\alpha} c(t)v(t)\rangle_0 \ge 0 \ \ (v \in W_2^2(bound)^+).$$

Далее, используя рассуждения при получении первого неравенства (15), приведенные выше, получим второе неравенство (15)

$$\|L^+ v\|_0 r^2 \ge \|v\|_0 \ \ (v \in W_2^2(bound)^+).$$

Согласно теореме 1 выполнение неравенств (15) является достаточным условием существования оператора L, удовлетворяющего (14) и имеющего непрерывный обратный, определенный на всем $L_2(G)$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность А. В. Псху за регулярные консультации и неоценимую поддержку.

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации, г. Нальчик

М. В. Кукушкин

Обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной

Рассматривается обобщенная краевая задача для уравнения второго порядка с дробной производной. Формулируются достаточные условия существования разрешимого расширения оператора в одномерном случае.

Մ. Վ. Կուկուշկին

Ընդհանրացված եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի կոտորակային ածանցյալով հավասարման համար

Դիտարկվում է ընդհանրացված եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի կոտորակային ածանցյալով հավասարման համար: Ձևավորվում են բավարար պայմաններ լուծելի ընդլայնված մի օպերատորի համար:

M. V. Kukushkin

Generalized Boundary Value Problem for the Second Order Equation with Fractional Derivative

A generalized boundary value problem for the second-order equation with fractional derivative is considered. Sufficient conditions for the existence of solvable extension of the operator in a one-dimensional case are formulated.

Литература

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев. Наукова думка. 1965. 798 с.
2. *Нахушев А. М.* - ДАН СССР. 1977. Т. 234. N 2.
3. *Кукушкин М. В.* - Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т.16. N 3.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. М. Наука. 1974. 479 с.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М. Наука. 1965.
6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. М. Наука. 1975. 407 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. М. Физматгиз. 1959. 752 с.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М. Наука. 1984.
9. *Алиханов А. А.* - Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. С. 658-664.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника.1987. 687 с.