ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 115 2015 № 2
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

С. Л. Гогян

О демократических системах в $L_1(0,1)^d$

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 23/III 2015)

Ключевые слова: *многомерная система Хаара, демократическая система.*

Пусть $\Psi=\{\psi_n\}$ – нормированная система в банаховом пространстве X. Для любого конечного множества натуральных чисел $A\subset N$ определим следующую функцию:

$$f_A=\sum\nolimits_{i\in A}\psi_i .$$

В общем случае норма функции f_A зависит не только от мощности множества A, но и от конкретных ее элементов. Однако легко заметить, что в случае, когда X является гильбертовым пространством, а Ψ – ортонормированной системой, мы имеем $\|f_A\|=\sqrt{\# A}$, т. е. норма $\|f_A\|$ не зависит от значений элементов множества A. В работе [1] введено понятие демократических систем, а именно

Определение 1. *Система элементов $\Psi=\{\psi_n\}$ называется демократической системой в X, если существует число $C\ge 1$ такое, что соотношение*

$$\|f_A\|\le C\|f_B\| \tag{1}$$

выполняется для любых конечных множеств натуральных чисел A и B с $\# A=\# B$.

Итак, имеем, что всякая ортонормированная в гильбертовом пространстве система является также демократической системой. Отметим, что понятие демократических систем тесно связано с теорией нелинейных аппроксимаций, точнее с жадными алгоритмами. В работе [1] доказано, что жадный алгоритм по некоторому базису обеспечивает очень хорошую скорость сходимости тогда и только тогда, когда этот базис является безусловным базисом и демократической системой. Другие свойства для демократических систем получены в работе [2].

В работах [3] и [4] описаны все подсистемы системы Хаара, которые являются демократическими системами в $L_1(0,1)$. В данной работе мы обобщаем этот результат на многомерный случай. Напомним определение многомерной системы Хаара.

Пусть D_n – множество всех двоичных интервалов длины 2^{-n}, а $D_n^d = D_n \times \ldots \times D_n$ – множество всех двоичных кубов длины 2^{-n}. Положим также $D^d = U_n D_n^d$.

Пусть $j = \overline{\in_1 \in_2 \ldots \in_d}$ – двоичное разложение числа $1 \le j \le 2^d - 1$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [0,1)^d$. Обозначим

$$h^{(j)}(x) = r_{\in_1}(x_1) \cdot r_{\in_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot r_{\in_d}(x_d),$$

где

$$r_0(t) = 1 \quad \text{и} \quad r_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Каждому $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \ldots \times [a_d, b_d) \in D_n^d$ и $j \in \overline{\in_1 \in_2 \ldots \in_d}$ соответствует следующая функция из системы Хаара:

$$h_I^{(j)}(x) = 2^{nd} h^{(j)}\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}, \ldots, \frac{x_d - a_d}{b_d - a_d} \right).$$

Многомерной системой Хаара называется множество функций $h_I^{(j)}$ совместно с функцией $h_{[0,1)^d}^{(0)} \equiv 1$. Значения функций в точках разрыва для нас не существенны, поэтому мы их не приводим.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть имеется множество двоичных кубов* $\{I_n\}$. *Тогда множество функций* $\left\{ \left\{ h_{I_n}^{(j)} \right\}_{j=1}^{2^d - 1} \right\}_{n=1}^{+\infty}$ *является демократической системой в* $L_1(0,1)^d$ *тогда и только тогда, когда существует натуральное число* N *такое, что из любой последовательности двоичных кубов* $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_N$ *с* $\mu(J_i) = 2^d \mu(J_{i-1})$ *для* $i = 2, 3, \ldots, N$ *существует по крайней мере один элемент, который не принадлежит* $\{I_n\}$.

Замечание. Конечное количество элементов не может повлиять на свойство демократичности системы, поэтому для удобства в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что двоичный куб $[0,1)^d$ отсутствует в наборах двоичных кубов.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. *Пусть имеются функция* $f \in L_1(0,1)^d$ *и двоичный куб* I. *Тогда*

$$\| f \|_I \ge \left| c_I^{(j)} \right|$$

для всех $1 \le j \le 2^d - 1$.

Доказательство. Заметим, что

$$\left|c_I^{(j)}\right| = \mu(I)\cdot\left|\int_I f(t)h_I^{(j)}(t)dt\right| \le \mu(I)\int_I \left|f(t)h_I^{(j)}(t)\right|dt \le \int_I \left|f(t)\right| = \|f\|_I .$$

Лемма 1 доказана.

Для любой функции $f\in L_1(0,1)^d$ и двоичного куба I положим

$$P_I(f) = f - \sum_{J\subseteq I}\sum_{j=1}^{2^d-1} c_J^{(j)}h_J^{(j)} .$$

Лемма 2. *Пусть имеется функция* $f\in L_1(0,1)^d$, *для которой* $\max_{J,j}\left|c_J^{(j)}\right|\le 1$. *Тогда для любого двоичного куба* I *имеет место следующее соотношение:*

$$\left\|P_I(f)\right\|_I \le 1.$$

Доказательство. Пусть $\mu(I)=2^{-nd}$. Заметим, что функция $P_I(f)$ постоянна на множестве I, а абсолютное значение этой величины не превосходит число

$$\left(2^d-1\right)\left(1+2^d+2^{2d}+\ldots+2^{(n-1)d}\right) = 2^{nd}-1<2^{nd} .$$

Поэтому имеем, что $\left\|P_I(f)\right\|_I \le 2^{nd}\cdot\mu(I)=1$. Лемма 2 доказана.

Пусть имеется набор двоичных кубов $\{I_n\}$ и $I\in\{I_n\}$. Обозначим через $K(I)$ самый маленький двоичный куб, который содержит в себе I и который не содержится в множестве $\{I_n\}$.

Лемма 3. *Пусть имеется конечное множество двоичных кубов* $\{J_s\}_{s=1}^m \subset \{I_n\}$, *где* $\{I_n\}$ *удовлетворяет условиям теоремы 1. Далее, пусть*

$$K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) = \left\{K(J) : J\{J_s\}_{s=1}^m\right\}.$$

Тогда

$$\#\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right) \ge \frac{m}{2^{(N-1)d}} .$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из определения $K\left(\{J_s\}_{s=1}^s\right)$ и условий леммы.

Доказательство теоремы. *Необходимость*. Пусть условие тоеремы не выполняется. Для произвольно большого M положим $N=\left(2^d-1\right)M$ и выберем множество двоичных кубов $J_1\subset J_2\subset\ldots\subset J_N$ с $\mu(J_i)=2^d\mu(J_{i-1})$ для $i=2,3,\ldots,N$. Легко проверить, что

$$\left\|\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{2^d-1} h_{J_i}^k\right\| < 2 ,$$

но

$$\left\|\sum_{i=1}^{N} h_{J_i}^{(1)}\right\| > \frac{N}{2}.$$

Это означает, что условие (1) не может выполняться ни при каком C.

Достаточность. Пусть условие теоремы выполняется. Далее, пусть имеется множество двоичных кубов $\{J_s\}_{s=1}^m$ (каждый может повторяться, но не более чем 2^d-1 раз). По индукции по $\#K\left(\{J_s\}_{s=1}^m\right)$ с использованием лемм 1-3 легко проверить, что для любых чисел $1\le j_1, j_2,\dots, j_k\le 2^d-1$ будет иметь место следующее соотношение:

$$\left\|\sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)}\right\|\ge\frac{m}{2^{Nd}}.$$

Но с другой стороны, согласно неравенству треугольника имеем, что

$$\left\|\sum_{i=1}^m h_{J_i}^{(j_i)}\right\|\le m,$$

т. е. условие (1) выполняется при $C=2^{Nd}$. Теорема 1 доказана.

Институт математики НАН РА
e-mail: gogyan@instmath.sci.am

С. Л. Гогян

О демократических системах в $L_1(0,1)^d$

Описаны все множества двоичных кубов $\{I_n\}$, для которых подмножество $\left\{h_{I_n}^{(j)}\right\}$ многомерной системы Хаара является демократической системой в $L_1(0,1)^d$.

Ս. Լ. Գոգյան

$L_1(0,1)^d$ –ում դեմոկրատիկ համակարգերի մասին

Նկարագրված են բոլոր երկուական խորանարդների $\{I_n\}$ բազմությունները, որոնց համար Հաարի բազմաչափ համակարգի $\left\{h_{I_n}^{(j)}\right\}$ ենթաբազմությունը $L_1(0,1)^d$ -ում դեմոկրատիկ համակարգ է:

S. L. Gogyan

On Democratic Systems in $L_1(0,1)^d$

All sets of dyadic cubes $\{I_n\}$ are characterized such that the subsystem $\left\{h_{I_n}^{(j)}\right\}$ of the multivariate Haar system is democratic system in $L_1(0,1)^d$.

Литература

1. *Konyagin S. V., Temlyakov V. N.* – East J. Approx. 1999. V. 5. P. 1-15.
2. *Dilworth S. J., Kalton N. J., Kutzarova D., Temlyakov V. N.* – Constr. Approx. 2003. V. 19. P. 575-597.
3. *Gogyan S.* – East Journal on Approximations. 2005. V. 11. P. 221-236.
4. *Gogyan S.* – J. of Contemporary Mathematical Analysis. 2011. V. 46. P. 21-31.