

УДК 519.6

Փ. Ա. Թալալյան

**Об одной теореме из теории равномерного  
 распределения последовательностей**

(Представлено академиком Н.У. Аракеляном 21/1 2015)

**Ключевые слова:** *равномерно распределенные последовательности.*

Известен следующий результат ([1], теорема 2.6).

**Теорема 1.** *Пусть последовательность  $x_n, n=1,2,\dots$ , равномерно распределена на  $[0,1]$ . Тогда имеет место равенство*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n|x_{n+1} - x_n| = \infty.$$

В монографии [1] данная теорема выводится как следствие из критерия Вейла и одной тауберовой теоремы Харди.

В настоящей заметке дается новое простое доказательство указанной теоремы, опирающееся только на определение равномерной распределенности и не использующее никаких вспомогательных фактов. При этом предложенный метод позволяет рассматривать сразу многомерный случай.

В конце будет показано, как можно перенести тот же результат на случай многомерных последовательностей с асимптотической функцией распределения ([1], с. 63).

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Пусть  $s \geq 1$  – натуральное число,  $s$ -мерные векторы будут обозначены через  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, \bar{x}_n$  и т. д.

Если  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , причем  $a_i < b_i$  для всех  $i=1, \dots, s$ , то через  $[\bar{a}, \bar{b})$  обозначим  $s$ -мерный полуоткрытый справа интервал, определенный точками  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , т. е.

$$[\bar{a}, \bar{b}) = \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i < b_i, i = 1, \dots, s\}.$$

Далее, если  $r$  – действительное число, через  $\bar{r}$  обозначим  $s$ -мерный вектор, все координаты которого равны  $r$ . Таким образом,

$$\bar{0} = (0, \dots, 0), \quad \bar{1} = (1, \dots, 1), \quad \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \text{ и т. д.}$$

Если  $\bar{x} \in R^s$  и  $F \subset R^s$ , то через  $|\bar{x}|$  и  $|F|$  будут обозначены модуль вектора  $\bar{x}$  и, соответственно,  $s$ -мерный объем  $F$  (если он существует).

Наконец, если  $F \subset R^s$ ,  $\bar{x}_n \in [\bar{0}, \bar{1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и  $N$  – натуральное число, то, следуя [1], через  $A(F; N; (\bar{x}_n))$  или просто  $A(F; N)$  обозначим количество членов  $\bar{x}_n$  с  $n \leq N$ , принадлежащих  $F$ .

Справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть последовательность  $(\bar{x}_n)$  равномерно распределена на  $s$ -мерном единичном кубе  $[\bar{0}, \bar{1}]$ . Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n |\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| = \infty.$$

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть

$$n |\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots; \quad C > 0. \quad (1)$$

Обозначим для краткости

$$I = \left[ \bar{0}, \left(\frac{1}{8s}\right) \right), \quad J = \left[ \bar{0}, \left(\frac{1}{4\sqrt{s}}\right) \right); \quad K = \left[ \bar{0}, \left(\frac{1}{2}\right) \right) \text{ и } F = [\bar{0}, \bar{1}] \setminus K,$$

где  $\setminus$  – знак теоретико-множественной разности.

Очевидно,  $F$  состоит из конечного числа попарно неперекрывающихся  $s$ -мерных сегментов. Следовательно, по условию теоремы выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(F; N)}{N} = |F|. \quad (2)$$

Выберем натуральное число  $n_0$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n| < \frac{1}{8\sqrt{s}} \quad \text{при } n \geq n_0. \quad (3)$$

Пусть  $(n_i)$  – бесконечная строго возрастающая последовательность номеров, для которых

$$n \geq n_0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_{n_i} \in I. \quad (4)$$

Для каждого  $i$  обозначим через  $m_i$  наименьшее натуральное число, для которого  $\bar{x}_{n_i+m_i}$  не принадлежит  $J$ . Тогда

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \geq \frac{1}{4\sqrt{s}} \quad (5)$$

и

$$|\bar{x}_{n_i} + j| \geq \frac{1}{4}, \quad j = 1, \dots, m_i - 1. \quad (6)$$

Кроме того, в силу (3) и (6) имеем

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \leq |\bar{x}_{n_i+m_i-1}| + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}| < \frac{1}{4} + \frac{1}{8\sqrt{s}} < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что  $\bar{x}_{n_i+j} \in K$  для всех  $j=0,1,\dots, m_i$ , откуда следует равенство

$$A(F; n_i + m_i) = A(F; n_i), \quad i=1,2,\dots \quad (8)$$

Далее, из очевидного неравенства

$$|\bar{x}_{n_i+m_i}| \leq |\bar{x}_{n_i}| + |\bar{x}_{n_i+1} - \bar{x}_{n_i}| + \dots + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}|$$

в силу (3) и (5) получим

$$|\bar{x}_{n_i+1} - \bar{x}_{n_i}| + \dots + |\bar{x}_{n_i+m_i} - \bar{x}_{n_i+m_i-1}| \geq |\bar{x}_{n_i+m_i}| - |\bar{x}_{n_i}| \geq \frac{1}{4\sqrt{s}} - \frac{1}{8\sqrt{s}} = \frac{1}{8\sqrt{s}}. \quad (9)$$

Теперь из (1) и (9) получим

$$\frac{m_i C}{n_i} > \frac{C}{n_i} + \dots + \frac{C}{n_i + m_i - 1} \geq \frac{1}{8\sqrt{s}}$$

или

$$\frac{m_i}{n_i} \geq \frac{1}{8C\sqrt{s}}, \quad i=1,2,\dots \quad (10)$$

(Заметим, что из (10) следует  $\lim m_i = \infty$ ).

В силу (8) и (10) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{A(F; n_i + m_i)}{n_i + m_i} &= \frac{A(F; n_i)}{n_i} = \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{n_i}{n_i + m_i} = \\ &= \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m_i}{n_i}} < \frac{A(F; n_i)}{n_i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}}. \end{aligned}$$

Предельным переходом при  $i \rightarrow \infty$  отсюда получим

$$|F| \leq |F| \frac{1}{1 + \frac{1}{8C\sqrt{s}}},$$

чего не может быть, так как у нас  $|F| > 0$  и  $C > 0$ . Таким образом, предположение (1) приводит к противоречию. Теорема 2 доказана.

Теперь перейдем к рассмотрению последовательностей с непрерывной асимптотической функцией распределения многих переменных (случай одной переменной легко сводится к случаю обычной равномерной распределенности).

Обозначим через  $G$  класс непрерывных монотонных функций, заданных на  $[\bar{0}, \bar{1}]$ ,  $g(\bar{0}) = 0$ ,  $g(\bar{1}) = 1$  и обладающих еще тем свойством, что области

$$\{\bar{x} \in [\bar{0}, \bar{1}] : g(\bar{x}) \geq t\}$$

являются квадратуемыми.

Монотонность функций многих переменных мы понимаем в смысле Юнга ([2], с. 347).

**Определение.** Пусть  $g \in \bar{G}$  и  $(\bar{x}_n)$  – некоторая последовательность точек  $[\bar{0}, \bar{1}]$ . Функцию  $g$  назовем асимптотической функцией распределения для  $(\bar{x}_n)$ , если для каждого  $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A\left(\left[0, \alpha\right]; N; (g(\bar{x}_n))\right)}{N} = \alpha. \quad (11)$$

Аналог теоремы 1 имеет место также для последовательностей с асимптотической функцией распределения в смысле приведенного определения. А именно, справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $(\bar{x}_n)$  – последовательность точек  $[\bar{0}, \bar{1}]$  и  $g \in \bar{G}$  является асимптотической функцией распределения для  $(\bar{x}_n)$ . Тогда имеет место равенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n |g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| = \infty.$$

**Доказательство.** Предположим обратное. Пусть

$$n |g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| \leq C; \quad n = 1, 2, \dots; \quad C > 0. \quad (12)$$

Выберем натуральное число  $n_0$  так, чтобы

$$|g(\bar{x}_{n+1}) - g(\bar{x}_n)| < \frac{1}{8} \quad \text{при} \quad n \geq n_0. \quad (13)$$

Пусть  $n_i$  – строго возрастающая бесконечная последовательность такая, что

$$n_i > n_0 \quad \text{и} \quad g(\bar{x}_i) < \frac{1}{8}. \quad (14)$$

Пусть для каждого  $i$   $m_i$  – наименьшее натуральное число, для которого

$$g(\bar{x}_{n_i+m_i}) \geq \frac{1}{4}. \quad (15)$$

Используя соотношения (12)–(15), с помощью тех же рассуждений, которые были применены при доказательстве теоремы 2, мы получим соотношение

$$A\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]; n_i + m_i; (g(\bar{x}_n))\right) = A\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]; n_i; (g(\bar{x}_n))\right)$$

и

$$\frac{m_i}{n_i} \geq \frac{1}{8C},$$

которые, как показано выше, приводят к противоречию. Теорема 3 доказана.

Институт математики НАН РА

**Փ. Ա. Թալալյան**

**Об одной теореме из теории равномерного  
распределения последовательностей**

Приводится новое простое доказательство одной теоремы из теории равномерно распределенных последовательностей. При этом предлагаемый метод позволяет обобщать указанную теорему на многомерный случай и на случай последовательностей с асимптотической функцией распределения.

**Ֆ. Ա. Թալալյան**

**Հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների  
տեսության մի թեորեմի մասին**

Բերվում է հավասարաչափ բաշխված հաջորդականությունների տեսության մի թեորեմի պարզ ապացույց, որը հնարավորություն է տալիս տարածելու նշված թեորեմը բազմաչափ, ինչպես նաև բաշխվածության ասիմպտոտիկ ֆունկցիա ունեցող հաջորդականությունների վրա:

**F. A. Talalyan**

**On a Theorem of the Theory of Uniform  
Distribution of Sequences**

A new simple proof is given for a theorem from the theory of uniform distribution of sequences. The presented method provides generalization of this theorem both to multidimensional case and for sequences with asymptotic function of distribution.

**Литература**

1. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерно распределенные последовательности. М. Наука. 1985.
2. *Hobson E. W.* The theory of functions of a real variable. New York. 1927.