ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.23

К. В. Арутюнян[1], А. Г. Камалян[2], И. М. Спитковский[3]

О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 8/VIII 2014)

Ключевые слова: *треугольные матрицы-функции, факторизация, частные индексы.*

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная конечно-связная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей Γ. Без ограничения общности, $0\in\Omega$. Ниже мы предполагаем, что контур Γ является карлесоновым. Как известно (см. [1]), в этом случае сингулярный интегральный оператор S, определенный по формуле

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ t\in\Gamma,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, является ограниченным в пространствах $L_p(\Gamma), 1<p<\infty$, и порождает аналитические проекторы $P_{\pm}=\frac{1}{2}(I\pm S)$. Рассмотрим классы функций $L_p^+=imP_+$, $L_p^-=imP_-+\mathbb{C}$. Через X^n и $X^{n\times n}$ будем обозначать соответственно множество n-мерных векторов и множество всех матриц размера $n\times n$ с компонентами из X.

Пусть $G,G^{-1}\in L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$. В ряде задач математической физики (см. [2]) важную роль играет представление

$$G=G_-\Lambda G_+^{-1},$$

где $G_{\pm}\in\left(L_p^{\pm}\right)^{n\times n}$, $G_{\pm}^{-1}\in\left(L_q^{\pm}\right)^{n\times n}\left(q=p/(p-1)\right)$, оператор GSG_-^{-1} ограничен в пространстве $\left(L_p(\Gamma)\right)^n$ (действие S на вектор-функцию понимается покомпонентно) и $\Lambda(t)=diag\left(t^{\kappa_1},\dots,t^{\kappa_n}\right),\kappa_1,\dots,\kappa_n\in\mathbb{Z}$.

Это представление принято называть факторизацией матрицы-функции G, а числа $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ – ее частными индексами. В скалярном случае

$n=1$ единственный частный индекс принято называть просто индексом функции G. Заметим, что набор частных индексов $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$ определяется с точностью до перестановки его компонент.

Для данного $\chi=(\chi_1,\dots,\chi_n)\in\mathbb{Z}^n$ через $T(\chi)$ обозначим класс нижнетреугольных матриц-функций из класса $L_\infty^{n\times n}(\Gamma)$ с факторизуемыми диагональными элементами, индексы которых равны соответственно $\chi_1,\dots,\chi_n$.

Как известно (см. [3], а также [2]), матрицы-функции из класса $T(\chi)$ допускают факторизацию. Множество всех возможных наборов частных индексов матриц-функций из $T(\chi)$ обозначим через $A(\chi)$. Множество $A(\chi)$ инвариантно относительно перестановок, т.е. с каждым вектором $\kappa\in A(\chi)$ множеству $A(\chi)$ принадлежат и векторы, полученные из κ путем перестановок его компонент. Поскольку χ является набором частных индексов любой диагональной матрицы из $T(\chi)$, то $\chi\in A(\chi)$. Подмножество B множества $A(\chi)$ будем называть базовым подмножеством $A(\chi)$, если множество векторов, полученных путем всевозможных перестановок компонент векторов из B, совпадает с $A(\chi)$. В [4] дана явная конструкция некоторого базового подмножества $A(\chi)$, и тем самым решена задача описания $A(\chi)$.

Для $\kappa\in\mathbb{Z}^n$ мы полагаем $\kappa_\uparrow=\left(\kappa_{(1)},\dots,\kappa_{(n)}\right)$, где $\kappa_{(1)}\le\dots\le\kappa_{(n)}$ – компоненты вектора κ, упорядоченные по неубыванию. Говорят (см.[5]), что вектор $\kappa\in\mathbb{Z}^n$ мажорируется вектором χ в смысле Харди – Литлвуда–Пойя, и пишут $\kappa\prec\chi$, если

$$\sum_{i=1}^{k}\kappa_{(i)}\ge\sum_{i=1}^{k}\chi_{(i)},\ k=1,\dots,n-1$$
$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i=\sum_{i=1}^{n}\chi_i\ . \tag{1}$$

В [3] (см. также [2]) доказано, что если $\kappa\in A(\chi)$, то $\kappa\prec\chi$. Таким образом, справедливы включения

$$E(\chi)\subseteq A(\chi)\subseteq M(\chi),$$

где $M(\chi)$ – множество всех векторов из $\mathbb{Z}^n$, мажорирующихся вектором χ, а $E(\chi)$– множество всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент.

В данной работе мы описываем множества векторов χ, для которых справедливо одно из равенств $A(\chi)=E(\chi)$, $A(\chi)=M(\chi)$. Отметим в этой связи результат И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна (см. [6], а также [7 - 9]), согласно которому при $\chi_1\ge\dots\ge\chi_n$ имеет место равенство $A(\chi)=E(\chi)$.

Основные результаты работы приведены в секциях 3 и 4. Они основаны на результатах работы [4]. Секция 2 является вспомогательной.

2. Предварительные результаты. Пусть $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $\Delta = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество

$$D(\chi) = \{(i,j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i - \chi_j \ge 2\}$$

и проекции $\pi_1 : D(\chi) \to \Delta$, $\pi_2 : D(\chi) \to \Delta$, определенные равенствами $\pi_1((i,j)) = i$, $\pi_2((i,j)) = j$. Для пары векторов χ и $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{Z}^n$ введем множества

$$D_{\kappa,\chi} = \{(i,j) \in \Delta \times \Delta; i > j, \chi_i > \kappa_i \ge \kappa_j > \chi_j\},$$

$$\Delta_+ = \{i \in \Delta; \kappa_i < \chi_i\}.$$

Напомним (см. [4]), что вектор κ T-мажорируется вектором $\chi \left(\kappa \underset{T}{\prec} \chi\right)$, если имеют место равенства (1), $\pi_2\left(D_{\kappa,\chi}\right) = \Delta_+$ и если для любого подмножества $\omega_+ \subset \Omega_+$ справедливо неравенство

$$\sum_{j \in \omega_+} \left(\kappa_j - \chi_j\right) \le \sum_{i \in \pi\left(D_{\kappa,\chi} \cap \pi_2^{-1}(\omega_+)\right)} \left(\chi_i - \kappa_i\right).$$

Будем говорить, что вектор κ Q-мажорируется вектором χ, если имеет место равенство (1) и справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} \kappa_i \ge \sum_{i=1}^{k} \chi_i, \ k = 1, \dots, n-1.$$

Пусть S_n – группа перестановок множества Δ. Через $S_n\left(D_{\kappa,\chi}\right)$ обозначим множество всех перестановок $\sigma \in S_n$ для которых $(i,j) \in D_{\kappa,\chi}$ влечет $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Вектор κ T-мажорируется вектором χ тогда и только тогда, когда для любой перестановки $\sigma \in S_n\left(D_{\kappa,\chi}\right)$ вектор $\kappa' = \left(\kappa_{\sigma(1)}, \dots, \kappa_{\sigma(n)}\right)$ Q-мажорируется вектором $\chi' = \left(\chi_{\sigma(1)}, \dots, \chi_{\sigma(n)}\right)$.*

Теорема 2. *Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}$ и $\kappa \underset{T}{\prec} \chi$. Тогда $\kappa \prec \chi$.*

Теорема 3. *Пусть $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$. Если $\chi = \chi_\uparrow$, $\kappa = \kappa_\uparrow$ и $\chi \prec \kappa$, то $\kappa \underset{T}{\prec} \chi$.*

Из теоремы 2 в частности следует независимое от [3] доказательство включения $A(\chi) \subseteq \mathrm{M}(\chi)$.

Для действительных чисел a и b $(a < b)$ через $I(a,b)$ обозначим множество целых чисел, лежащих в отрезке $[a;b]$, а через $F(a,b)$ $(a \ge 2, b \ge 2)$ – множество пар целых чисел k_1, k_2, удовлетворяющих системе неравенств $2k_1 + k_2 \le a$, $k_1 + 2k_2 \le b$.

Следующая теорема дает явное описание множества $A(\chi)$ при $n = 3$, отличное от предложенных ранее в [9] и [10].

Теорема 4. *Пусть* $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. *Тогда*

a) *если* $D(\chi) = \varnothing$, *то множество* $\{\chi\}$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$;

b) *если* $D(\chi) = \{(2;1)\}$, *то множество векторов* $\{(\chi_1 + k, \chi_2 - k, \chi_3);\ k \in I(0; (\chi_2 - \chi_1)/2)\}$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$;

c) *если* $D(\chi) = \{(3;1)\}$, *то множество, состоящее из вектора* χ *и вектора* $\chi' = (\chi_1 + 1, \chi_2, \chi_3 - 1)$, *является базовым подмножеством* $A(\chi)$;

d) *если* $D(\chi) = \{(3;2)\}$, *то множество* $\{(\chi_1, \chi_2 + k, \chi_3 - k);\ k \in I(0; (\chi_3 - \chi_2)/2)\}$ *является базовым подмножеством* $A(\chi)$;

e) *если* $D(\chi) = \{(2;1), (3;1)\}$, *то множество векторов вида*

$$\kappa = (\chi_1 + k_1 + k_2, \chi_2 - k_1, \chi_3 - k_2), \tag{2}$$

где

$$(k_1, k_2) \in F(\chi_2 - \chi_1, \chi_3 - \chi_1) \cup \{(k_1; 0); k_1 \in I(\chi_3 - \chi_2 + 1; (\chi_2 - \chi_1)/2)\} \tag{3}$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

f) *если* $D(\chi) = \{(3,1), (3,2)\}$, *то множество векторов вида*

$$\kappa = (\chi_1 + m_1, \chi_2 + m_2, \chi_3 - m_1 - m_2), \tag{4}$$

где

$$(m_1, m_2) \in F(\chi_3 - \chi_1, \chi_3 - \chi_2) \cup \{(0; m_2); m_2 \in I(\chi_3 - \chi_1 + 1; (\chi_3 - \chi_2)/2)\}, \tag{5}$$

является базовым подмножеством $A(\chi)$;

g) *если* $D(\chi) = \{(2;1), (3;1), (3;2)\}$, *то объединение множеств векторов вида (2) и (4), где числа* k_1, k_2 *определяются соотношением (3), а числа* m_1, m_2 *– соотношением (5), является базовым подмножеством* $A(\chi)$.

3. Минимальное базовое подмножество. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Множество, состоящее из одного элемента* χ, *является базовым подмножеством* $A(\chi)$ *тогда и только тогда, когда множество* $D(\chi)$ *пусто. Иными словами, для выполнения равенства* $A(\chi) = E(\chi)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $D(\chi) = \varnothing$.

Заметим, что условие $D(\chi) = \varnothing$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \ldots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \le \chi_j + 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с невозрастающими компонентами $\chi_1 \ge \ldots \ge \chi_n$, в соответствии с вышеуказанным результатом И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна.

4. Максимальное базовое подмножество. Для каждого $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n) \in$
$\in \mathbb{Z}^n$ определим множество

$$D_-(\chi) = \{(i,j) \in \Delta \times \Delta; \, j < i, \chi_j - \chi_i \geq 2\}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\kappa, \chi \in \mathbb{Z}^n$, $D_-(\chi) = \varnothing$ *и* $\kappa \prec \chi$. *Тогда* $\kappa \in A(\chi)$. *Иными словами, в случае* $D_-(\chi) = \varnothing$ *справедливо равенство* $A(\chi) = M(\chi)$.

Условие $D_-(\chi) = \varnothing$ эквивалентно тому, что для любого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ и для любого $s \in \{1, \ldots, n-j\}$ справедливы неравенства $\chi_{j+s} \geq \chi_j - 1$. В частности, этому условию удовлетворяют векторы с неубывающими компонентами $\chi_1 \leq \ldots \leq \chi_n$.

Следующее утверждение уточняет теорему 6 в случае $n = 3$.

Теорема 7. *Пусть* $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \in \mathbb{Z}^3$. *Для того чтобы имело место равенство* $A(\chi) = M(\chi)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих трех условий:*

a) $D_-(\chi) = \varnothing$;

b) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 + 2$;

c) $\chi_1 = \chi_3 = \chi_2 - 2$.

[1]Российско-Армянский (Славянский) университет
e-mail: harkamo@rambler.ru
[2]Ереванский государственный университет, Институт математики НАН РА
e-mail: kamalyan_armen@yahoo.com
[3]The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia, USA, and New York University Abu Dhabi (NYUAD), UAE
e-mail: ilya@math.wm.edu, ims2@nyu.edu, imspitkovsky@gmail.com

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян, И. М. Спитковский

О некоторых экстремальных свойствах частных индексов треугольных матриц-функций

Рассматривается множество наборов частных индексов нижнетреугольных матриц-функций, диагональные элементы которых факторизуемы с индексами, равными компонентам вектора $\chi \in \mathbb{Z}^n$. Указанное множество $A(\chi)$ содержит множество $E(\chi)$ всех векторов, полученных из χ перестановкой его компонент, и содержится в множестве $M(\chi)$ всех векторов, мажорирующихся вектором χ. Найдены условия на χ, обеспечивающие одно из равенств $A(\chi) = E(\chi)$, $A(\chi) = M(\chi)$.

Կ. Վ. Հարությունյան, Ա. Հ. Քամալյան, Ի. Մ. Սպիտկովսկի

Եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաների մասնավոր ինդեքսների որոշ էքստրեմալ հատկությունների մասին

Դիտարկվում են ստորին-եռանկյունի մատրից-ֆունկցիաներ, որոնց անկյունագծային տարրերը ֆակտորիզացվող են $\chi \in \mathbb{Z}^n$ վեկտորի կոմպոնենտներին հավասար ինդեքսներով: Այդ դասի հնարավոր մասնավոր ինդեքսների $A(\chi)$ բազմությունը պարունակում է χ վեկտորի կոմպոնենտների տեղափոխության միջոցով ստացված $E(\chi)$ վեկտորների բազմությունը և ընդգրկված է χ վեկտորով մաժորացվող $M(\chi)$ վեկտորների բազմության մեջ: Գտնված են χ-ի վրա պայմաններ, որոնք ապահովում են $A(\chi)=E(\chi)$, $A(\chi)=M(\chi)$ հավասարումներից մեկը:

K. V. Harutyunyan, A. G. Kamalyan, I. M. Spitkovsky

On Some Extremal Properties of the Partial Indices of Triangular Matrix-Functions

The set of tuples of the partial indices of lower-triangular matrix-functions is considered, diagonal elements of which are factorizable with indices equal to the components of the vector $\chi \in \mathbb{Z}^n$. The mentioned set $A(\chi)$ contains the set $E(\chi)$ of all vectors obtained from χ by permuting its components and is contained in the set $M(\chi)$ of all vectors majorized by χ. The conditions on χ under which $A(\chi)=E(\chi)$ or $A(\chi)=M(\chi)$ are obtained.

Литература

1. *Böttcher A., Karlovich Yu. I.* Carleson curves, Muchenhoupt weights, and Toeplitz operators. Basel and Boston. Birkhäser Verlag. 1997.
2. *Litvinchuk G. S., Spitkovsky I. M.* Factorization of matrix-functions. Basel and Boston. Birkhäser Verlag. 1987.
3. *Спитковский И. М.* - ДАН СССР. 1980. Т. 254. N 4. С. 816-820.
4. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г., Спитковский И. М.* - ДНАН РА. 2015. Т. 115. N1. С. 7-14.
5. *Маршал А., Олкин И.* Неравенства. Теория мажорации и ее приложения. М. Мир. 1983. 576 с.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* - УМН. 1958. Т. 13, N 2. С. 3-72.
7. *Николайчук А. М.* - Укр. мат. журн. 1971. Т. 23. N 6. С. 793-798.
8. *Примачук Л. П.* - ДАН БССР. 1970. Т. 14. N1. С. 5-7.
9. *Спитковский И. М., Тишин П. М.* - Укр. мат. журн. 1987. Т. 39. N 6, С. 751-756.
10. *Арутюнян К. В., Камалян А. Г.* – Математика в высшей школе. 2006. Т. 42. N2. С. 10-16.