0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 Հ Ա Յ Ա Ս Տ Ա Ն Ի
Գ Ի Տ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն Ն Ե Ր Ի Ա Զ Գ Ա Յ Ի Ն Ա Կ Ա Դ Ե Մ Ի Ա
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

С. Л. Гогян

Об одном свойстве слабого жадного алгоритма по общей системе Хаара

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 17/X 2014)

Ключевые слова: *общая система Хаара, слабый жадный алгоритм.*

Пусть $\{\psi_n\}$ нормированный базис в банаховом пространстве X. Тогда для любого элемента $x\in X$ будем иметь разложение

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)\psi_n$$

с $\lim_{n\to\infty}c_n(x)=0$.

Пусть дано число $0<t\le 1$. По индукции по m определим множества Λ_m^t таким образом, чтобы имели место следующие соотношения:

$$\Lambda_0^t=\varnothing,\Lambda_{m-1}^t\subset\Lambda_m^t,\left|\Lambda_m^t\right|=m$$

$\min\limits_{i\in\Lambda_m^t}\left|c_i(x)\right|\ge t\max\limits_{i\notin\Lambda_m^t}\left|c_i(x)\right|$.

Заметим, что последовательность $\left\{\Lambda_m^t\right\}$ может определяться неоднозначно. Множество всех таких последовательностей обозначим через $D^t(x)$. Из определения непосредственно следует, что

$$D^{t_1}(x)\subset D^{t_2}(x)\text{ при }t_1>t_2.$$

Для любого $x\in X$ и $\Lambda=\left\{\Lambda_m^t\right\}\in D^t(x)$ положим

$$G_m^t=G_m^t(x)=G_m^t(x,\Lambda)=\sum_{i\in\Lambda_m^t}c_i(x)\psi_i.$$

При $t=1$ будем коротко писать Λ_m, D и G_m.

Определение 1. *Базис ψ в банаховом пространстве X называется квази-гриди базисом, если существует число $C\ge 1$ такое, что для любого элемента $x\in X$ существует последовательность $\Lambda\in D(x)$ такая, что*

$$\left\|G_m(x,\Lambda)\right\|\le C\|x\| \tag{1}$$

для всех натуральных m.

Легко заметить, что если базис является квази-гриди базисом, то неравенство (1) имеет место для всех $\Lambda \in D(x)$. Подробнее о квази-гриди базисах написано в работе [1].

В работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Базис* ψ *является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого элемента* $x \in X$ *и для любой* $\Lambda \in D(x)$ *справедливо следующее равенство*:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - G_m(x,\Lambda) \right\| = 0 . \tag{2}$$

Для квази-гриди базисов верна следующая теорема (см [1]).

Теорема 2. *Если базис* ψ *является квази-гриди базисом, то для любого* $0 < t < 1$ *и для любого* $\Lambda^t \in D^t(x)$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - G_m^t(x,\Lambda^t) \right\| = 0 \tag{3}$$

и

$$\left\| G_m^t(x,\Lambda^t) \right\| \le C\|x\| , \tag{4}$$

при C, *которое зависит только от* t.

Известно, что система Хаара $\{\chi\}$ не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$, т. е. соотношения (1) и (2) в общем случае неверны. Однако в работе [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого* $0 < t < 1$ *существует число* $C \ge 1$ *такое, что для любого* $x \in L^1(0,1)$ *существует* $\Lambda^t \in D^t(x)$, *для которой по системе Хаара имеют место соотношения (3) и (4).*

В настоящей работе доказывается, что аналогичная теорема неверна для общих систем Хаара. В частности доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Существует общая система Хаара такая, что для любого* $0 < t < 1$ *существует функция* $f \in L^1(0,1)$ *такая, что*

$$\sup_m \frac{\left\| G_m^t(f,\Lambda^t) \right\|}{\|f\|} = +\infty ,$$

для всех $\Lambda^t \in D^t(x)$.

Замечание 1. Заметим, что в данной теореме функция зависит от t. Однако из доказательства легко видеть, что при правильном выборе последовательности $\{N_i\}$ можно добиться того, чтоб функция f не зависела от t.

Пусть дана общая система Хаара $h_0^{(0)}, h_k^{(i)}, 1 \le i \le 2^k; k = 0,1,2,\ldots$. Обозначим через $\Delta_k^{(i)}$ носитель функции $h_k^{(i)}$. Согласно определению имеем, что $\Delta_k^{(i)} = \Delta_{k+1}^{(2i-1)} \cup \Delta_{k+1}^{(2i)}$. Положим

$$\gamma_k^{(i)} = \frac{\left|\Delta_{k+1}^{(2i-1)}\right|}{\left|\Delta_{k+1}^{(2i)}\right|}.$$

Коэффициенты разложения $c_k^{(i)}$ определяются согласно формулам

$$c_0^{(0)}(x) = \int_0^1 x$$

и

$$c_0^{(0)}(x) = \frac{2}{1+\gamma_k^{(i)}}\left(\int_{\Delta_{k+1}^{(2i-1)}} x - \gamma_k^{(i)} \int_{\Delta_{k+1}^{(2i)}} x\right), \tag{5}$$

В настоящей работе мы рассматриваем общую систему Хаара, для которой величины $\gamma_k^{(i)}$ определяются следующим образом:

$$\gamma_k^{(i)} = \begin{cases} m, \textit{если } i = 1 \textit{ и } 2^m < k < 2^{m+1} \\ 1, \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{6}$$

Для краткости будем писать $\delta_k = \Delta_k^{(1)}$ и $H_k = h_k^{(1)}$.

Лемма 1. *Пусть даны натуральные числа* $M > N$. *Тогда для функции*

$$f_{M,N} = \sum_{a=M}^{N}\left(H_{2^\alpha} + \sum_{\beta=2^\alpha+1}^{2^{\alpha+1}-1} \frac{2}{1+\alpha} H_\beta\right)$$

справедливы следующие соотношения:

$$\left\| f_{M,N} \right\| < 2 \tag{7}$$

и

$$\frac{M-N}{4} < \left\| \sum_{\alpha=M}^{N} H_{2^\alpha} \right\| < M - N. \tag{8}$$

Доказательство. С помощью формул (5) и (6) легко проверяется, что

$$f_{M,N}(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \notin \delta_{2^M} \\ -\dfrac{1}{\left|\delta_{2^M}\right|}, \quad \text{при } x \in \delta_{2^M} \setminus \delta_{2^N}, \\ \dfrac{1}{\left|\delta_{2^N}\right|} - \dfrac{1}{\left|\delta_{2^M}\right|}, \text{при } x \in \delta_{2^N}. \end{cases}$$

Из этого соотношения сразу следует первое утверждение леммы. Второе утверждение легко доказывается с помощью математической индукции по $M - N$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выберем быстро возрастающую последовательность натуральных чисел $\{N_k\}$ с $\frac{2}{1+N_0} < t$. Условие на скорость возрастания поставим в дальнейшем.

Обозначим

$$F_i = \frac{t^i}{1+N_{2i}} f_{N_{2i}, N_{2i+1}}.$$

Положим

$$f=\sum_{i=0}^{\infty} F_i .$$

С учетом (7) имеем, что

$$\|f\|<\frac{2}{1-t} .$$

Заметим, что самый маленький ненулевой коэффициент в разложении F_i будет равен

$$m_i=\frac{t^i}{1+N_{2i}}\frac{2}{1+N_{2i+1}} ,$$

а самый большой будет равен

$$M_i=\frac{t^i}{1+N_{2i}} .$$

Поэтому, если N_{2i+2} будет достаточно большим по сравнению с N_{2i} и N_{2i+1}, то

$$N_{i+1}<tm_i .$$

Следовательно, для любого натурального k можно будет найти натуральное число n_k такое, что

$$G_{n_k}^t(f)=\sum_{i=0}^{k-1} F_i+\frac{t^k}{1+N_{2k}}\sum_{\alpha=N_{2k}}^{2k-1} H_{\alpha i} .$$

Отсюда с применением леммы 1 получаем, что

$$\left\|G_{n_k}^t(f)\right\|>\frac{t^k\left(N_{2k+1}-N_{2k}\right)}{4\left(1+N_{2k}\right)}-2\left(1+t+\ldots+t^{k-1}\right).$$

Если выбрать N_{2k+1} достаточно большим по сравнению с N_{2k}, то можно достичь того, чтоб правая часть была сколь угодно большой, т. е. при правильном выборе последовательности $\{N_i\}$ будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\left\|G_{n_k}^t(f)\right\|=+\infty .$$

Теорема доказана.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта NSCS 13-1A313.

Институт математики НАН РА

С. Л. Гогян

Об одном свойстве слабого жадного алгоритма по общей системе Хаара

Построены общая система Хаара $H=\{h_i\}$ и элемент из $L^1(0,1)$ такие, что для этого элемента ни одна ветвь слабого жадного алгоритма по системе H не сходится в $L^1(0,1)$.

Ս. Լ. Գոգյան

Ըստ Հաարի ընդհանրացված համակարգի թույլ ագահ ալգորիթմի մի հատկության մասին

Կառուցված է Հաարի ընդհանրացված $H=\{h_i\}$ համակարգ և $L^1(0,1)$ -ից էլեմենտ այնպիսին, որ այդ էլեմենտի համար թույլ ագահ ալգորիթմի իրագործումներից ոչ մեկը չի զուգամիտում $L^1(0,1)$ -ում՝ ըստ H համակարգի:

S. L. Gogyan

On a Property of Weak Greedy Algorithm with Respect to the General Haar System

The General Haar system $H=\{h_i\}$ and the element from $L^1(0,1)$ are constructed in such a way, that no branch of Weak Greedy Algorithm with respect to H converges in $L^1(0,1)$.

Литература

1. *Temlyakov V. N.* - Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33-107.
2. *Wojtashchyk P.* - Journal of Approximation Theory. 2000. V. 107. P. 293-314.
3. *Gogyan S.* - Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161 P. 49-64.