

УДК 621.38, 62.50

А. А. Гукасян

### Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора

(Представлено академиком Ю. Л. Саркисяном 23/VI 2014)

**Ключевые слова:** *упругий манипулятор, кинематическое управление, оптимальное управление.*

**Введение.** При исследовании движений манипуляционных роботов и проектировании систем управления обычно используется механическая модель робота в виде системы абсолютно твердых тел (стержней), соединенных идеальными шарнирами. Однако при движении роботов в ряде случаев существенное значение имеет упругая податливость конструкции, которая влияет на качество выполняемых работ. Упругость конструкции манипулятора обусловлена различными факторами, которые можно разделить на две группы: упругая податливость соединительных узлов (шарниров) и упругость звеньев. Эффективное управление упругих роботов возможно только за счет разработки специальных режимов управления, учитывающих влияние упругих свойств манипулятора в процессе движения. Сказанное обуславливает актуальность научных исследований по кинематике, динамике и оптимизации режимов управления роботов с упругими свойствами [1-8]. В настоящей работе исследуется задача оптимального кинематического управления движением схвата двухзвенного упругого манипулятора по заданной нестационарной поверхности.

**1. Описание объекта исследования.** Механическая модель манипулятора состоит из подвижной платформы и механической руки со схватом (рис.1). Рука состоит из двух звеньев, соединенных шарниром  $O_2$ . Первое звено соединено шарниром  $O_1$  с платформой и является абсолютно твердым телом. Второе звено является упругим нерастяжимым стержнем, на конце которого расположен схват. Соединительные шарниры – идеально цилиндрические. Платформа (основания) манипулятора обеспечивает поворот механической руки относительно оси  $O_0Z_0$ . Манипулятор имеет три степени подвижности. Для описания движений манипулятора введем инерциальную  $O_0X_0Y_0Z_0$  и неинерциальные  $O_1X_1Y_1Z_1, O_2X_2Y_2Z_2$  системы координат.

Введем обозначения:  $l_1$  – длина первого звена,  $l_2$  – длина второго звена,  $\alpha_0$  – угол между осями  $O_0X_0$  и  $O_1X_1$  ( $\alpha_0$  – угол поворота первого звена относительно оси  $O_0Z_0$ ),  $\alpha_1$  – угол поворота первого звена относительно платформы,  $\alpha_2$  – угол между касательной  $O_2y$  к упругому звену  $O_2p$  в точке  $O_2$  и первым звеном ( $\alpha_2$  – угол поворота второго упругого звена),  $\mathbf{w}(t, \xi)$  – радиус-вектор упругой деформации точек нейтральной линии второго звена манипулятора в системе координат  $O_2xyz$  ( $\xi \in [0, l_2]$ ),  $\mathbf{R}_1(t, \xi)$  – радиус-вектор точек нейтральной линии второго звена относительно точки  $O_1$  в момент времени  $t$ , а  $\mathbf{R}(t, \xi)$  – радиус-вектор относительно точки  $O_0$ .

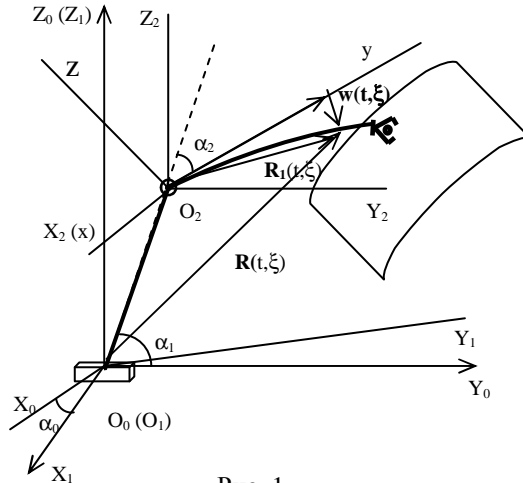


Рис. 1

**2. Управление движением схвата упругого манипулятора по заданной поверхности.** Пусть в пространстве задана нестационарная поверхность, которая описывается уравнением

$$g(q_1, q_2, q_3, t) = 0 \quad (2.1)$$

и при  $t = t_0$  координаты схвата упругого манипулятора удовлетворяют уравнению поверхности. Требуется найти такие управляющие функции в виде обобщенных скоростей  $u_i = \dot{\alpha}_i(\alpha, \mathbf{w}(t, l_2), \dot{\mathbf{w}}(t, l_2))$  ( $i = 0, 1, 2$ ), которые по принципу обратной связи в зависимости от обобщенных координат и упругих свойств второго звена обеспечивают движение схвата по заданной поверхности (2.1) и минимизируют некоторый функционал, характеризующий качество управляемого процесса:

$$J = \Phi[u_0, u_1, u_2] \rightarrow \min_u \quad (2.2)$$

Для исследования поставленной задачи определим положение схвата упругого манипулятора и уравнение поверхности (2.1) в зависимости от обобщенных координат манипулятора и вектора упругих смещений схвата в инерциальной системе координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ .

В рамках линейной теории упругих нерастяжимых стержней предполагаем, что компоненты вектора  $\mathbf{w}(t, \xi) = (w_1(t, \xi), w_2(t, \xi), w_3(t, \xi))$  и их производные имеют следующие порядки малости [9, 10]

$$w_i(t, \xi) \sim \varepsilon, w'_i(t, \xi) \sim \varepsilon, \dot{w}_i(t, \xi) \sim \varepsilon \quad (i = 1, 3), \quad (2.3)$$

$$w_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2, w_2'(t, \xi) \sim \varepsilon^2, \dot{w}_2(t, \xi) \sim \varepsilon^2,$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр,  $l_2 \sim 1$ .

Здесь частные производные по  $\xi$  обозначены штрихом, а по  $t$  – точкой.

Поскольку некоторый класс манипуляционных роботов предназначен для выполнения более точных работ, то в рассматриваемом случае оставляем члены, порядок которых не превышает  $\varepsilon^2$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{R}_1(t, \xi)$  в системе координат  $O_2xyz$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}_1(t, \xi) = (w_1(t, \xi), \xi + w_2(t, \xi), w_3(t, \xi))^T. \quad (2.4)$$

Координаты точек нейтральной линии упругого звена в каждый момент времени относительно системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  можно определить с помощью матрицы перехода от системы  $O_2xyz$  к системе  $O_2X_2Y_2Z_2$ , следующим образом [10,11]:

$$\begin{pmatrix} X_2(t, \xi) \\ Y_2(t, \xi) \\ Z_2(t, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ 0 & \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t, \xi) \\ \xi + w_2(t, \xi) \\ w_3(t, \xi) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Поскольку оси системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  и  $O_1X_1Y_1Z_1$  параллельны, то координаты точек нейтральной линии второго звена в системе  $O_1X_1Y_1Z_1$  равны

$$X_1(t, \xi) = w_1(t, \xi), \quad (2.6)$$

$$Y_1(t, \xi) = l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$Z_1(t, \xi) = l_1 \sin \alpha_1 + \xi \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + w_2(t, \xi) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Определяя матрицу перехода от системы  $O_1X_1Y_1Z_1$  к инерциальной системе координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ , можно получить координаты точек нейтральной линии второго упругого звена и схвата (при  $\xi = l_2$ ) в инерциальной системе координат в виде

$$\mathbf{R}(t, \xi) = \begin{pmatrix} q_1(t, \xi) \\ q_2(t, \xi) \\ q_3(t, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 & -\sin \alpha_0 & 0 \\ \sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t, \xi) \\ Y_1(t, \xi) \\ Z_1(t, \xi) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

или

$$\begin{aligned} q_1(t, \xi) &= w_1(t, \xi) \cos \alpha_0 - [l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &\quad + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \sin \alpha_0, \\ q_2(t, \xi) &= w_1(t, \xi) \sin \alpha_0 + [l_1 \cos \alpha_1 + \xi \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &\quad + w_2(t, \xi) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, \xi) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \cos \alpha_0, \\ q_3(t, \xi) &= l_1 \sin \alpha_1 + \xi \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &\quad + w_2(t, \xi) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + w_3(t, \xi) \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для определения управляющих параметров схвата манипулятора вычислим полные производные по времени функции (2.1) в силу (2.8) при  $\xi = l_2$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \sum_{j=0}^2 u_j f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)), \quad (i = 1, 2, 3), \\ u_j &= \dot{\alpha}_j \quad (j = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь функции  $f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2))$  и  $f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2))$  ( $i = 1, 2, 3; j = 0, 1, 2$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= -w_1(t, l_2) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 [l_1 \cos \alpha_1 + \\ &\quad + (l_2 + w_2(t, l_2)) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ f_{11}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= [l_1 \sin \alpha_1 + (l_2 + w_2(t, l_2)) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &\quad + w_3(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \sin \alpha_0, \\ f_{12}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= -[(l_2 + w_2(t, l_2)) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + w_3(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \sin \alpha_0, \\ f_1^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) &= \dot{w}_1(t, l_2) \cos \alpha_0 - [\dot{w}_2(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \\ &\quad - \dot{w}_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \sin \alpha_0, \\ f_{20}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= w_1(t, l_2) \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 [l_1 \cos \alpha_1 + \\ &\quad + (l_2 + w_2(t, l_2)) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ f_{21}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= -[l_1 \sin \alpha_1 + (l_2 + w_2(t, l_2)) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ &\quad + w_3(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \cos \alpha_0, \\ f_{22}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= [(l_2 + w_2(t, l_2)) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + w_3(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \cos \alpha_0, \\ f_2^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) &= \dot{w}_1(t, l_2) \sin \alpha_0 + [\dot{w}_2(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \\ &\quad - \dot{w}_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] \cos \alpha_0, \\ f_{30}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &\equiv 0, \\ f_{31}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= l_1 \cos \alpha_1 + (l_2 + w_2(t, l_2)) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \\ &\quad - w_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2), \\ f_{32}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= -(l_2 + w_2(t, l_2)) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - w_3(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2), \\ f_3^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) &= \dot{w}_2(t, l_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \dot{w}_3(t, l_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) с учетом (2.11), получим следующее линейное алгебраическое уравнение относительно управляющих функций  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ):

$$\sum_{j=0}^2 u_j a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) + c(t) = 0, \quad (2.12)$$

где коэффициентами уравнения являются

$$\begin{aligned} a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial q_i} f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)), \\ b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial q_i} f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)), \quad c(t) = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (j = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для определения оптимальной управляющей функции  $u_j^0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в качестве критерия оптимальности (2.2) возьмем квадратичный функционал

$$J = \sum_{j=0}^2 u_j^2 \rightarrow \min_u \quad (2.14)$$

и составим расширенный функционал  $\tilde{J}$

$$\tilde{J} = \sum_{j=0}^2 u_j^2 + \lambda [\sum_{j=0}^3 u_j a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) + c(t)], \quad (2.15)$$

где  $\lambda$  – неопределенный коэффициент Лагранжа.

Из условия минимума функционала (2.15) по  $u_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ) следует, что

$$u_j^0 = -\frac{1}{2} \lambda a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.12), определим коэффициент  $\lambda$ , следовательно и оптимальные управляющие функции, которые обеспечивают движение схвата по поверхности (2.1)

$$u_j^0 = -a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) [b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) + c(t)] [\sum_{i=0}^2 a_i^2(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2))]^{-1/2}, (j = 0, 1, 2). \quad (2.17)$$

Управляющие функции (2.17) зависят от обобщенных координат манипулятора, от компонентов вектора упругих смещений схвата и их производных по времени, а также от нестационарности программы.

Оптимально управляющие функции (2.17) с точностью  $\varepsilon^2$  можно реализовать в системе управления в режиме обратной связи, с помощью измерительных устройств, которые в реальном масштабе времени измеряют и передают вычислительному устройству обобщенные координаты,

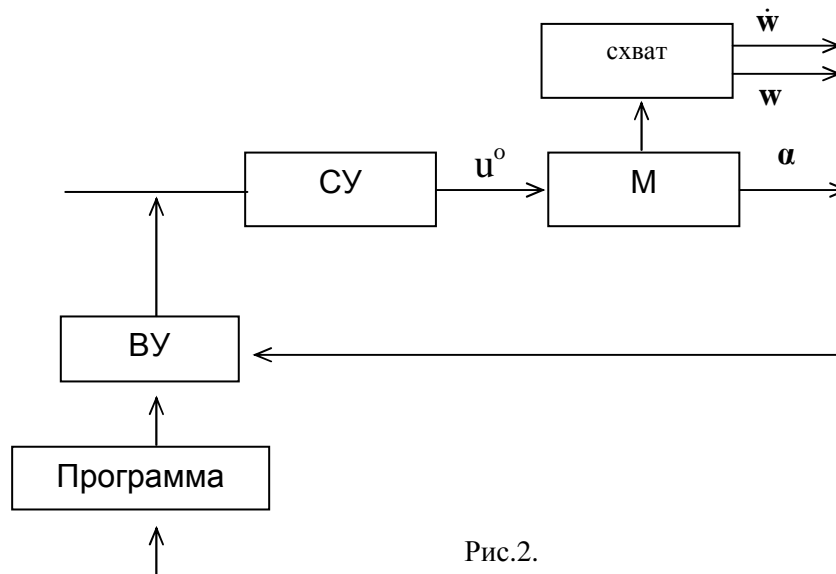


Рис.2.

компоненты вектора упругих смещений схвата и их производные (рис. 2).

**3. Оптимальное управление схвата упругого манипулятора по поверхности с заданной скоростью.** В рассматриваемом случае требуется определить управляющие функции, которые обеспечивают движение схвата

та упругого манипулятора (рис. 1) по поверхности (2.1) со скоростью  $\mathbf{v}(t)$  и минимизируют функционал (2.14).

Компоненты вектора скорости движения схвата  $\dot{q}_i$  ( $i=1,2,3$ ) в зависимости от управляющих параметров  $u_j$  ( $j=0,1,2$ ) (обобщенных скоростей  $\dot{\alpha}_j$ ,  $j=0,1,2$ ), компонентов вектора упругих смещений схвата  $w_i(t, l_2)$  и их производных по времени  $\dot{w}_i(t, l_2)$  ( $i=1,2,3$ ) определяются выражениями (2.10), (2.11).

Задачу определения оптимально управляющей функции  $u^o_j$  ( $j=0,1,2$ ) здесь можно сформулировать следующим образом: обеспечить минимум функционала (2.14)

$$J = \sum_{j=0}^2 u_j^2 \rightarrow \min_u$$

при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 u_j a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) + c(t) &= 0, \\ \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=0}^2 u_j f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) \right]^2 &= v^2, \quad (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 = v^2), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где коэффициенты  $a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2))$  ( $j=0,1,2$ ),  $b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2))$ ,  $c(t)$  определяются из (2.13), а функции  $f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2))$ ,  $f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2))$  ( $i=1,2,3$ ) – из (2.11).

Для сформулированных задач (3.1) из условий минимума расширенного функционала по  $u_j$  ( $j=0,1,2$ )

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \sum_{j=0}^2 u_j^2 + \lambda_1 \left[ \sum_{j=0}^2 u_j a_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + b(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) + c(t) \right] + \\ &+ \lambda_2 \left[ \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=0}^2 u_j f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}(t, l_2)) \right]^2 - v^2 \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители Лагранжа, получим систему алгебраических уравнений относительно управляющей функции  $u_j$  ( $j=0,1,2$ ) в виде

$$\begin{aligned} u_0 \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^3 f_{i0}^2(\cdot) \lambda_2 \right) \right] + u_1 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i0}(\cdot) f_{i1}(\cdot) \lambda_2 \right) + u_2 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i0}(\cdot) f_{i2}(\cdot) \lambda_2 \right) &= \\ = -\frac{1}{2} \lambda_1 a_0(\cdot) - \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^3 f_i^*(\cdot) f_{i0}(\cdot) \right), \\ u_0 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i0}(\cdot) f_{i1}(\cdot) \lambda_2 \right) + u_1 \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^3 f_{i1}^2(\cdot) \lambda_2 \right) \right] + u_2 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i1}(\cdot) f_{i2}(\cdot) \lambda_2 \right) &= \\ = -\frac{1}{2} \lambda_1 a_1(\cdot) - \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^3 f_i^*(\cdot) f_{i1}(\cdot) \right), \quad (3.3) \\ u_0 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i0}(\cdot) f_{i2}(\cdot) \lambda_2 \right) + u_1 \left( \sum_{i=1}^3 f_{i1}(\cdot) f_{i2}(\cdot) \lambda_2 \right) + u_2 \left[ 1 + \left( \sum_{i=1}^3 f_{i2}^2(\cdot) \lambda_2 \right) \right] &= \\ = -\frac{1}{2} \lambda_1 a_2(\cdot) - \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^3 f_i^*(\cdot) f_{i2}(\cdot) \right), \end{aligned}$$

где символом  $(\cdot)$  обозначены аргументы соответствующих функций.

Решая систему (3.3) относительно  $u_j$  ( $j=0,1,2$ ), получим управляющие функции в зависимости от обобщенных координат, компонентов вектора упругих смещений и их производных, а также от неопределенных множителей Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$

$$u_j = u_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2), \dot{\mathbf{w}}(t, l_2), \lambda_1, \lambda_2, t) \quad (j=0,1,2) \quad (3.4)$$

Далее, подставляя выражение (3.4) в (3.1), получим систему алгебраических уравнений относительно  $\lambda_1, \lambda_2$ . Определяя  $\lambda_1, \lambda_2$  и подставляя в (3.4), найдем оптимальные управляющие функции

$$u_j^0 = u_j^0(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2), \dot{\mathbf{w}}(t, l_2), \mathbf{v}, t), \quad (j=0,1,2), \quad (3.5)$$

которые могут обеспечивать движение схвата упругого манипулятора по поверхности (2.1) со скоростью  $\mathbf{v}(t)$ .

Рассмотрим частный случай, когда требуется обеспечивать движение схвата упругого манипулятора по поверхности (2.1) с минимизацией функционала (2.2) при заданной одним из компонентов вектора скорости схвата  $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ . Для определенности, не нарушая общности, предполагаем, что  $v_3 = f(t)$ .

Условия (3.1) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\sum_{j=0}^2 u_j \tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) + \tilde{b}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}) + \tilde{c}(t) = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{a}_j = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial q_i} f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)),$$

$$\tilde{b}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g}{\partial q_i} f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}), \tilde{c}(t) = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial q_3} f(t)$$

(функции  $f_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2))$ ,  $f_i^*(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}})$  определяются из (2.11)).

Минимум расширенного функционала

$$\tilde{J} = \sum_{j=0}^2 u_j^2 + \mu \left[ \sum_{j=0}^2 u_j \tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}) + \tilde{b}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}) + \tilde{c}(t) \right] \quad (3.7)$$

достигается при

$$u_j = -\frac{1}{2} \mu \tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}), \quad (j=0,1,2). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.6), определим коэффициент Лагранжа в виде

$$\mu = 2 \left[ \tilde{b}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}) + \tilde{c}(t) \right] / \sum_{j=0}^2 \left[ \tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) \right]^2,$$

следовательно, и оптимально управляющие функции

$$u_j^0 = -\tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) \left[ \tilde{b}(\mathbf{a}, \dot{\mathbf{w}}) + \tilde{c}(t) \right] / \sum_{j=0}^2 \left[ \tilde{a}_j(\mathbf{a}, \mathbf{w}(t, l_2)) \right]^2, \quad (j=0,1,2). \quad (3.9)$$

Итак, для рассматриваемого частного случая определены оптимально управляющие функции в зависимости от обобщенных координат, компонентов вектора упругих смещений и их производных, а также от заданной

функции изменения компонента вектора скорости схвата  $v_3 = f(t)$ . Управление (3.9) можно реализовать в рамках схемы рис.2.

**Заключение.** Приведены описание модели манипулятора с тремя степенями подвижности и кинематические уравнения движений схвата, в предположении, что второе звено является нерастяжимым упругим стержнем. Сформулированы и методом неопределенных множителей Лагранжа исследованы задачи кинематического оптимального управления движением схвата по заданной нестационарной поверхности. В качестве критерия оптимальности выбран квадратический функционал. Получены аналитические выражения для оптимально управляющей функции, которые можно реализовать в рамках приведенной схемы управления. При заданной скорости движения схвата упругого манипулятора в общем случае приводится описание алгоритмов оптимального управления, которые в каждом случае можно реализовать с применением вычислительных методов. В связи с ограничением объема статьи численные результаты исследования здесь не приводятся. В дальнейших исследованиях по оптимальному кинематическому управлению манипуляторов будут учтены также упругие свойства соединительных узлов.

Институт механики НАН РА

**А. А. Гукасян**

### **Кинематическое управление движением схвата двухзвенного упругого манипулятора**

Исследуется задача кинематического управления движением схвата двухзвенного упругого манипулятора по заданной нестационарной поверхности с минимизацией квадратичного функционала. Методом неопределенных множителей Лагранжа в рамках линейной теории упругости определены оптимально управляющие функции в виде обобщенных скоростей. Определены также управляющие функции, обеспечивающие оптимальное движение схвата по поверхности с заданной скоростью.

**Ա. Ա. Ղուկասյան**

### **Առաձգական երկօղակ մանիպուլյատորի բռնիչի կինեմատիկական կառավարում**

Հետազոտվում է երկօղակ առաձգական մանիպուլյատորի բռնիչի կինեմատիկական ղեկավարման խնդիրը՝ տրված ոչ ստացիոնար մակերևույթով, մինիմիզացնելով քառակուսային ֆունկցիոնալ: Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդով առաձգականության գծային տեսության սահմաններում որոշված են օպտիմալ ղեկավարող ֆունկցիաները՝ որպես ընդհանրացված արագություններ: Որոշված են նաև ղեկավարող ֆունկցիաները, որոնք ապահովում են բռնիչի օպտիմալ շարժումը մակերևույթով տրված արագությամբ:



**A. A. Ghukasyan**

**On Kinematic Control of Elastic Two-Link Manipulator  
Clamp Motion**

The problem of kinematic control of elastic two-link manipulator clamp motion on the given nonstationary surface with minimization of a quadratic functional is investigated. Using the method of Lagrange undetermined multipliers in the framework of linear elasticity theory the optimal operating functions in terms of generalized velocities are determined. The operating functions providing the optimal clamp motion at surface with given velocities have been also determined.

**Литература**

1. Черноусько Ф. Л., Градецкий В. Г., Болотник Н. Н. Манипуляционные роботы. М. Наука. 1989. 363 с.
2. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. – Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 33-41.
3. Градецкий В. Г., Гукасян А. А., Грудев А. И., Черноусько Ф. Л. – Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №3. С. 63-71.
4. Болотник Н. Н., Гукасян А. А. – Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 38-46.
5. Гукасян А. А. – Изв. НАН РА. Механика. 2002. № 3. С. 79-87.
6. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. – ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 587-595.
7. Гукасян А. А., Мачкалян Р. Н. – Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60. № 3. С. 62-67.
8. Мачкалян Р. Н. – АГПИУ. Ученые записки. 2005. № 2. С. 13-19.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. Наука. 1979. 560 с.
10. Лурье А. И. Аналитическая механика. М. Наука. 1961.
11. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. М. Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2004. 478 с.