

Рассмотрим теперь задачу устойчивости сжатого стержня. На рис. 1,б показана вставленная в упругий массив часть незначительно возмущенного стержня. Для наглядности угол вращения вставленной части α и ее смещение показаны существенно увеличенно.

В нижеприведенных рассуждениях будем считать, что тангенс угла вращения вставленной части $\frac{dw}{dx}$ прямо пропорционален вращающим моментам с коэффициентом D . Нетрудно заметить, что в принятой системе координат отрицательные моменты стремятся увеличить, а положительные, наоборот, уменьшить значение производной $\frac{dw}{dx}$. Поступательное же

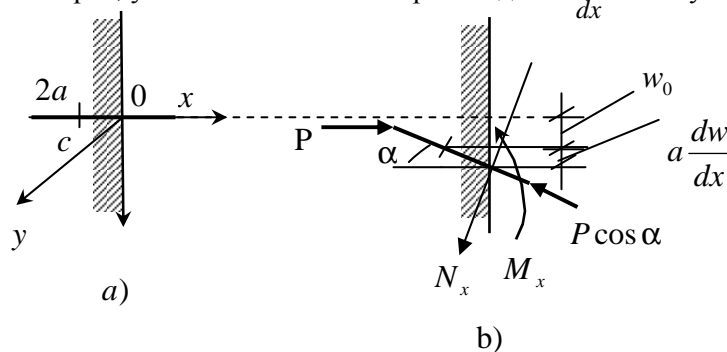


Рис. 1

перемещение вставленной части стержня будем считать прямо пропорциональным действующим перпендикулярным силам с коэффициентом пропорциональности B .

Строго говоря в любом сечении поперечная сила N_x не вертикальна, а перпендикулярна оси возмущенного стержня. На правом конце вставленной части стержня $x=0$ (рис. 1,б) действуют две взаимно перпендикулярные силы – поперечная сила N_x и осевая сила $P \cos \alpha$. Кроме этих сил в сечении $x=0$ действует еще и изгибающий момент M_x . Осевая сила не влияет ни на вращение, ни на вертикальное смещение вставленной части стержня. Поперечная сила N_x относительно середины вставленной части стержня $\ll c \gg$ дает вращающий момент $(-aN_x)$, который вместе с моментом M_x стремится вращать вставленную часть стержня на угол, тангенс которого равен $D(aN_x - M_x)$. На левом конце вставленной части стержня действует горизонтальная внешняя сила P , которая относительно точки $\ll c \gg$ дает момент $(-Pa \frac{dw}{dx})$, стремящийся увеличить тангенс угла вращения на величину $DPa \frac{dw}{dx}$. Поэтому тангенс полного угла вращения вставленной части стержня будет:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = D \left(aN_x + aP \frac{dw}{dx} - M_x \right). \quad (1.2)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вертикальном смещении вставленной части. Поперечная сила N_x сообщает этой части стержня перемещение своего направления BN_x . Горизонтальная же сила левого конца P имеет составляющую $P \sin \alpha \approx P \operatorname{tg} \alpha = P \frac{dw}{dx}$, перпендикулярную вставленной части, которая стремится уменьшить это смещение на величину $BP \frac{dw}{dx}$. Поэтому полное смещение вставленной части стержня будет $B \left(N_x - P \frac{dw}{dx} \right)$. Из-за малости угла α это смещение от своей вертикальной составляющей w_0 практически не отличается. Поэтому чтобы получить прогиб стержня в сечении $x=0$, следует к значению $w_0 = B \left(N_x - P \frac{dw}{dx} \right)$ добавить величину $a \frac{dw}{dx}$, возникшую от уклона вставленной части.

Следовательно,

$$w|_{x=0} = a \frac{dw}{dx} + B \left(N_x - P \frac{dw}{dx} \right). \quad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) являются условиями упруго защемленной опоры для задачи устойчивости сжатого стержня. При $P=0$ они совпадают с условиями (1.1).

2. Рассмотрим задачу устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения. Уравнение устойчивости стержня, сжатого постоянными осевыми силами P , имеет вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (2.1)$$

Здесь E – модуль Юнга материала, J – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня относительно центральной оси Oy .

Решение уравнения (2.1) представим в виде

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx, \quad (2.2)$$

где c_i – постоянные интегрирования. Рассмотрим три случая. Во всех этих случаях левый край стержня $x=0$ имеет упруго защемленную опору. Правый же край $x=l$ в первом случае шарнирно оперт, во втором – свободен, а в третьем – жестко защемлен.

Случай I. Краевые условия имеют вид:
при $x=0$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= D \left(aN_x + Pa \frac{dw}{dx} - M_x \right), \\ w &= a \frac{dw}{dx} + B \left(N_x - P \frac{dw}{dx} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

при $x = l$

$$w = 0, \quad M_x = 0. \quad (2.4)$$

Изгибающий момент M_x и поперечная сила N_x имеют выражения:

$$M_x = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad N_x = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (2.5)$$

С учетом (2.1) и (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= P(c_3 \cos kx + c_4 \sin kx), \\ N_x &= -kP(c_3 \sin kx - c_4 \cos kx). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= nl, \quad c_1 = l\bar{c}_1, \quad c_2 = l\bar{c}_2, \quad c_3 = l\bar{c}_3, \quad c_4 = l\bar{c}_4 \\ k &= \bar{k}/l, \quad P = \bar{k}^2 EJ/l^2, \quad B = l^3 \bar{B}/EJ, \quad D = l\bar{D}/EJ \end{aligned} \quad (2.7)$$

Краевые условия (2.3), (2.4) с учетом этих обозначений примут вид:

$$\begin{cases} (1 - \bar{D}n\bar{k}^2)\bar{c}_2 + \bar{D}\bar{k}^2\bar{c}_3 + \bar{k}(1 - 2n\bar{D}\bar{k}^2)\bar{c}_4 = 0, \\ \bar{c}_1 - (n - \bar{k}^2\bar{B})\bar{c}_2 + \bar{c}_3 - \bar{k}n\bar{c}_4 = 0, \\ \bar{c}_1 + \bar{c}_2 = 0, \\ \bar{c}_3 \cos \bar{k} + \bar{c}_4 \sin \bar{k} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

По условию существования нетривиальных решений определитель системы (2.8) должен быть равен нулю. Это приводит к уравнению

$$\bar{k} \left[1 - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n(2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n) \right] \cos \bar{k} - \left[1 + \bar{D}\bar{k}^2(1 - \bar{B}\bar{k}^2) \right] \sin \bar{k} = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, критическая сила стержня $P_{кр} = \bar{k}^2 EJ/l^2$ определится с помощью наименьшего нетривиального решения уравнения (2.9). В случае, когда вместо упруго защемленной опоры будет абсолютно жестко защемленная опора, т. е. $\bar{B} = \bar{D} = 0$, уравнение (2.9) примет вид

$$tg \bar{k} - \bar{k} = 0. \quad (2.10)$$

Так как наименьшим нетривиальным решением уравнения (2.10) является $\bar{k} = 4.4934 \approx \sqrt{2.0458}\pi \approx \sqrt{2}\pi$, то критическая сила стержня, как и известно, будет:

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.11)$$

Случай II. Краевые условия этого случая отличаются от краевых условий первого случая только тем, что вместо первого условия (2.4) имеем

$$N_x|_{x=l} = P \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l}. \quad (2.12)$$

С учетом (2.2) и (2.6) из (2.12) следует

$$c_2 = 0. \quad (2.13)$$

Имея в виду это обстоятельство, из равенства нулю определителя системы уравнений, соответствующих краевым условиям, для второго случая получим

$$\bar{D}\bar{k} \sin \bar{k} + (2n\bar{D}\bar{k}^2 - 1)\cos \bar{k} = 0. \quad (2.14)$$

Следовательно, критическая сила во втором случае определится наименьшим нетривиальным корнем уравнения (2.14). В случае, когда вместо упруго защемленной опоры будет жестко защемленная опора, уравнение (2.14) примет вид

$$\cos \bar{k} = 0. \quad (2.15)$$

Тогда

$$\bar{B} = \bar{D} = 0 \quad \bar{k} = \pi/2 \Rightarrow P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (2.16)$$

Случай III. Краевые условия этого случая от краевых условий первого случая отличаются только тем, что вместо второго условия (2.5) имеет место условие

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.17)$$

Тогда из равенства нулю определителя однородной системы алгебраических уравнений, полученных из краевых условий третьего случая, получим

$$\begin{aligned} & 2 - \bar{D}\bar{k}^2 n - \left[2 + \bar{D}\bar{k}^2 (1 - \bar{B}\bar{k}^2 - 2n + \cos \bar{k}) \right] \cos \bar{k} - \\ & - \bar{k} \left[1 - \bar{D} - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n (2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n - \sin \bar{k}) \right] \sin \bar{k} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В случае, когда вместо упруго защемленной опоры будет жестко защемленная опора, $\bar{B} = \bar{D} = 0$ и уравнение (2.18) примет вид

$$2 - 2\cos \bar{k} - \bar{k} \sin \bar{k} = 0. \quad (2.19)$$

Наименьшим нетривиальным решением этого уравнения является $\bar{k} = 2\pi$. Следовательно, как известно [2],

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (2.20)$$

3. Рассмотрим численный пример. Согласно [1] и обозначениям (2.7)

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow \bar{D} = \frac{3\bar{B}}{n^2}. \quad (3.1)$$

Из (2.10), (2.15) и (2.19) видно, что при $\bar{B} = 0$ значения \bar{k} не зависят от n и равны известным значениям, соответствующим случаю, когда вместо упруго защемленной опоры имеется жестко защемленная опора.

В табл.1 приведены значения \bar{k} и безразмерной критической силы

$$\bar{P}_{кр} = \frac{P_{кр} l^2}{EJ} = \bar{k}^2 \quad (3.2)$$

при $n = 0.05$, когда значение \bar{B} изменяется от нуля до бесконечности.

В табл. 2 приведены значения этих же величин III случая для некоторых n , при $\bar{B} = \infty$.

Полученные результаты приводят к следующим заключениям.

1) При $\bar{B}=0$, т.е. когда опора является жестко заземленной, значения \bar{k} , а следовательно, и значения критической силы стержня во всех случаях совпадают с соответствующими известными значениями [2].

2) При незначительном увеличении значения параметра \bar{B} упруго заземленная опора резко ослабевает, и значение \bar{k} , следовательно и критической силы, во всех случаях существенно уменьшается.

Таблица 1

\bar{B}	\bar{k}			$\bar{P}_{кр}$		
	Случай			Случай		
	I	II	III	I	II	III
0	4.493	1.571	6.283	20.191	2.467	39.478
0.001	3.097	0.780	4.254	9.591	0.609	18.101
0.01	2.883	0.272	3.963	8.312	0.074	15.708
0.1	2.836	0.087	2.956	8.044	0.007	8.739
1	1.001	0.027	1.675	1.002	0.001	2.806
10	0.317	0.009	1.456	0.100	0	2.119
100	0.100	0.003	1.432	0.010	0	2.049
1000	0.032	0.001	1.429	0.001	0	2.042
10000	0.010	0	1.429	0.000	0	2.042
20000	0.007	0	1.429	0	0	2.042
∞	0	0	1.429	0	0	2.042

Таблица 2

n	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
\bar{k}	1.429	1.404	1.380	1.357	1.335	1.314
$\bar{P}_{кр}$	2.042	1.971	1.904	1.841	1.782	1.728

3) Когда значение параметра \bar{B} стремится к бесконечности, упруго заземленная опора исчезает и левый край стержня становится свободным концом. Тогда длина стержня становится равной не l , а $(1+2n)l$.

4) При $\bar{B} \rightarrow \infty$ в первом случае левый край стержня свободен, а правый край лежит на шарнирной опоре. Во втором же случае оба конца стержня свободны. Поэтому в первых двух случаях при отсутствии промежуточных опор стержень превращается в механизм, и любое незначительное возмущение нарушает равновесие. В этих случаях критическая сила равна нулю.

5) В третьем случае при $\bar{B} \rightarrow \infty$ левый край стержня становится свободным, а правый остается жестко заземленным. Однако значение \bar{k} стремится не к $\pi/2$, а к $\pi/2(1+2n)$. Это является следствием того, что длина стержня уже равна не l , а $(1+2n)l$. В силу этого

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4[(1+2n)l]^2}. \quad (3.3)$$

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

Устойчивость стержня при наличии упруго защемленной опоры

Получены условия упруго защемленной опоры для задачи устойчивости стержня. Решаются три задачи. Считается, что стержень в одном краю имеет упруго защемленную опору, а другой его край шарнирно оперт, свободен или жестко защемлен. Исходя из анализа результатов решения делаются качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան, Ս. Պ. Ստեփանյան

Ձողի կայունությունը առաձգական ամրակցման հենարանի առկայությամբ

Ստացվում են առաձգական ամրակցման հենարանի պայմանները ձողի կայունության խնդրի համար: Լուծվում են երեք խնդիրներ: Ընդունվում է, որ ձողը մի ծայրում ունի առաձգական ամրակցման հենարան, իսկ նրա մյուս ծայրը հողակապրեն հենված է, ազատ է, կամ կոշտ ամրակցված: Լուծման արդյունքների վերլուծության հիման վրա արվում են որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan

Stability of the Rod in the Presence of Elastic Clamped Support

Conditions for elastically clamped supports are obtained for the stability problem of the rod. Three problems are solved. It is considered that the rod has elastic jammed support at one end whereas its other end is hinged, free or rigidly clamped. Analyzing the results of the decisions qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Киракосян Р. М.* - ДНАН РА. 2014. Т. 114. № 2. С. 101-107.
2. *Беляев Н.М.* Соппротивление материалов. М. Наука, 1976. 608 с.