ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.544.8

В. А. Бабаян

О граничной задаче Гильберта в пространстве непрерывных функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 5/ VI 2014)

Ключевые слова: *задача Гильберта, аппроксимативная единица, краевая задача, интеграл типа Коши, непрерывные функции.*

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть G – односвязная ограниченная область комплексной плоскости, ограниченная кривой Ляпунова Γ. Не умаляя общности, можем предполагать, что $0 \in G$. Работа посвящена исследованию в этой области граничной задачи Гильберта в пространстве непрерывных функций. Классическая постановка этой задачи следующая. Требуется определить функцию Φ, аналитическую в области G и непрерывную вплоть до границы Γ по граничному условию

$$\Re a(t)\Phi(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1}$$

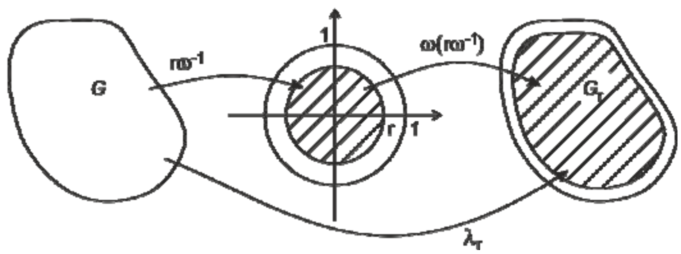
где a и f – заданные функции на Γ. В случае, когда f непрерывна по Гельдеру на Γ, а $a(t) \neq 0$ и также удовлетворяет условию Гельдера на Γ, задача (1) исследована в различных работах (см. исторический обзор к главе 4 в [1], см. также [2]). В случае непрерывных функций данная постановка уже не является корректной, так как интеграл типа Коши не является ограниченным в пространстве непрерывных функций. В работах Г. М. Айрапетяна (см.[3]) предложена новая постановка граничных задач, которая позволила исследовать задачу Гильберта в пространствах интегрируемых функций в единичном круге [4].

В настоящей работе мы исследуем задачу Гильберта в пространстве непрерывных функций, используя идею, развитую Г. М. Айрапетяном и его учениками.

Для точной формулировки введем следующие определения.

Пусть $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D$ – его граница. Обозначим ω функцию, конформно отображающую круг D на область G, и для любого $0 < r < 1$ положим

$$\lambda_r(z) = \omega\left(r\omega^{-1}(z)\right), \quad z \in G. \tag{2}$$



Рассмотрим следующую задачу:

Определение 1. *Определить голоморфную в* G *функцию* Φ *по граничному условию*

$$\left\| \Re\left(a\left(t\right)\Phi\left(\lambda_r\left(t\right)\right)\right) - f(t) \right\|_{C(\Gamma)} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Здесь f – заданная на Γ непрерывная функция, $a\left(t\right) \neq 0$ при $t \in \Gamma$ и $a \in C^{(\alpha)}\left(\Gamma\right)$. Не умаляя общности, можем предполагать, что $\left|a\left(t\right)\right| = 1$ при $t \in \Gamma$. Задачу (3) будем называть задачей G. При $f \equiv 0$ задачу G будем называть однородной.

Перейдем к решению задачи (3). Обозначим $z = \omega\left(\zeta\right) \in D,\ \tau = \omega\left(t\right) \in T$. Отметим, что функция

$$\Omega\left(z\right) = \Phi\left(\omega^{-1}\left(z\right)\right), \quad z \in D \tag{4}$$

аналитична в круге D. В этих обозначениях условие (3) примет вид

$$\left\| \Re\left(a\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right)\Omega\left(r\tau\right)\right) - f\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right) \right\|_{C(T)} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Обозначим

$$A\left(\tau\right) = a\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right), \quad F\left(\tau\right) = f\left(\omega^{-1}\left(\tau\right)\right), \quad \tau \in T. \tag{5}$$

Тогда последнее предельное соотношение примет вид

$$\lim_{r\to 1} \max_{t\in T} \left| \Re\left(A\left(\tau\right)\Omega\left(r\tau\right)\right) - F\left(\tau\right) \right| = 0. \tag{6}$$

Далее, учитывая, что функция $\left|A\left(\tau\right)\right| = 1$ на единичной окружности T, представим ее в виде [5]

$$A\left(\tau\right) = \tau^{\kappa} e^{i\Re\psi\left(\tau\right)}, \tag{7}$$

где $\kappa = \underset{T}{ind}\, A = \dfrac{1}{2\pi} VarA\left(\tau\right)\Big|_T$, а ψ – аналитическая функция, определенная по формуле Шварца [5]:

$$\psi\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \alpha\left(\tau\right) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau}, \quad \alpha\left(\tau\right) = argA\left(\tau\right) - \kappa\theta, \tau = e^{i\theta}.$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\left\| \Re\left(\tau^{\kappa} e^{i\psi\left(\tau\right)}\Omega\left(r\tau\right)\right) - e^{-\Im\psi\left(\tau\right)} F\left(\tau\right) \right\|_{C(T)} \xrightarrow[r\to 1]{} 0.$$

Случаи неотрицательного и отрицательного κ рассмотрим отдельно.

Пусть $\kappa \geq 0$. Тогда аналитическая в круге D функция $z^{\kappa} e^{i\psi(z)} \Omega(rz) = S(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $D \cup T$, и на границе T удовлетворяет условию $\Re(S(\tau)) = g_r(\tau)$, где

$$g_r(\tau) = \Re\left(\tau^{\kappa} e^{i\psi(\tau)} \Omega(r\tau)\right). \tag{8}$$

Тогда функция $S(z)$ определяется по формуле Шварца

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T g_r(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ic, \quad z \in D.$$

Зафиксируем $z \in D$ и перейдем к пределу в последнем равенстве при $r \to 1$. Получим

$$z^{\kappa} \Omega(z) = \frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ice^{-i\psi(z)}. \tag{9}$$

Пусть $\kappa = 0$. Тогда последнее выражение примет вид

$$\Omega(z) = \frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} + ice^{-i\psi(z)},$$

или, возвращаясь к переменной $\zeta \in G^{+}$ и $t \in \Gamma$,

$$\Phi(\zeta) = e^{-i\psi(\omega(\zeta))} \left(\int_T f(t) e^{-\Im\psi(\omega(\tau))} \frac{\omega(t) + \omega(\zeta)}{\omega(t) - \omega(\zeta)} \frac{\omega'(t)\, dt}{\omega(t)} + ice^{-i\psi(z)} \right). \tag{10}$$

Покажем, что функция (10) является решением задачи (3). Подставляя (10) в предельное соотношение (3), получим

$$\left\| \Re\left(\frac{e^{i\Re\psi(\omega(t_0)) - i\psi(r\omega(t_0))}}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))} f(t) \frac{\omega(t) + r\omega(t_0)}{\omega(t) - r\omega(t_0)} \frac{\omega'(t)\, dt}{\omega(t)} \right) - f(t_0) \right\|_{C(\Gamma)} =$$

$$\left\| \Re\left(\frac{e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(t) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right) - F(\tau_0) \right\|_{C(T)} \equiv P.$$

Функция ψ удовлетворяет условию Гельдера в замкнутом круге $D \cup T$, следовательно,

$$\max_{\tau_0} \left| e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} - 1 \right| \leq c(1 - r)^{\sigma} \tag{11}$$

при некотором $0 < \sigma < 1$. Далее, так как $e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau)$ непрерывна на T, имеем

$$\max_{\tau_0} \left| \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right| \leq c \|F\|_{C(T)} \ln|1 - r|^{-1}. \tag{12}$$

Используем неравенства (11) и (12) для оценки P. Имеем

$$P \leq \left\| \Re\left(\frac{e^{i(\psi(\tau_0) - \psi(r\tau_0))} - 1}{2\pi i} e^{\Im\psi(\tau_0)} \int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau) \frac{\tau + r\tau_0}{\tau - r\tau_0} \frac{d\tau}{\tau} \right) \right\|_{C(T)} +$$

$$+\left\|\Re\left(\frac{e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+r\tau_0}{\tau-r\tau_0}\frac{d\tau}{\tau}\right)-F(\tau_0)\right\|_{C(T)}\equiv I_1+I_2.$$

Из (11) и (12)

$$I_1\le c\|F\|_{C(T)}(1-r)^{\alpha}\ln|1-r|^{-1},$$

следовательно, I_1 стремится к нулю при $r\to 1$.

$$I_2=\left\|\Re\left(\frac{e^{\Im\psi(\tau_0)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{\tau+r\tau_0}{\tau-r\tau_0}\frac{d\tau}{\tau}\right)-F(\tau_0)\right\|_{C(T)}\le$$

$$\le c\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\Im\psi\left(e^{i\theta}\right)}F\left(e^{i\theta}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2}\,d\theta-e^{-\Im\psi\left(e^{i\theta_0}\right)}F\left(e^{i\theta_0}\right)\right\|_{C(T)}.$$

Последнее выражение также стремится к нулю по свойству интеграла Пуассона от непрерывных функций [6]. Таким образом, функция (10) является решением задачи (3). Итак, при $\kappa=0$ задача (3) имеет решение для любой $f\in C(\Gamma)$, и соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое над полем действительных чисел решение. Общее решение задается формулой (10). Пусть $\kappa>0$. Тогда из (9) имеем, что правая часть обращается в нуль при $z=0$ вместе с производными до порядка $\kappa-1$. Следовательно, $c=0$, и

$$\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=0,\quad \Re\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{\kappa+1}}=\Im\int_T e^{-Im\psi(\tau)}F(\tau)\frac{d\tau}{\tau^{\kappa+1}}=0 \quad (13)$$

при $k=1,2,...,\kappa-1$. При выполнении $2\kappa-1$ условий (13) решение Φ определяется по формуле

$$\Phi(\zeta)=\frac{e^{-i\psi(\omega(\zeta))}}{\zeta^{\kappa}2\pi i}\int_T e^{-Im\psi(\tau)}f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}. \quad (14)$$

Соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений.

Теперь рассмотрим случай $\kappa<0$. Представим функцию $\Omega(rz)$ в виде

$$\Omega(rz)=\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k z^k+z^{-\kappa}\Omega_{1r}(z). \quad (15)$$

Используя это представление, уравнение (8) представим в следующей форме:

$$\Re\left(e^{i\psi(\tau)}\Omega_{1r}(\tau)\right)=g_r(\tau)-\Re\left(e^{i\psi(t)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k\tau^{k+\kappa}\right).$$

Используя формулу Шварца, получим

$$e^{i\psi(z)}\Omega_{1r}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_T g_r(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_T\Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1}c_k\tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+ic.$$

Перейдем в последнем равенстве к пределу при $r \to 1$. Если $z \in D$, то соотношение (15) в пределе примет вид $\Omega(z) = \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k z^k + z^{-\kappa}\Omega_1(z)$, где $d_k = \frac{\Omega^{(k)}(0)}{k!}$. Таким образом, получим

$$e^{i\psi(z)}\Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} - \frac{1}{2\pi i}\int_T \Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} + ic.$$

Итак,

$$\begin{gathered}\Omega(z) = \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k z^k + z^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(z)}}{2\pi i}\int_T e^{-\Im\psi(\tau)} F(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} - \\ \frac{z^{|\kappa|}e^{-i\psi(z)}}{2\pi i}\int_T \Re\left(e^{i\psi(\tau)}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \tau^{k+\kappa}\right)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} + icz^{|\kappa|}e^{i\psi(z)}\end{gathered},$$

и, следовательно, общее решение задачи (3) определяется по формуле

$$\Phi(\zeta) = \left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(\zeta)}}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))} f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)} + V_0(\zeta), \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}V_0(\zeta) = ic\left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|} e^{-i\psi(\omega(\zeta))} + \sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \left(\omega(\zeta)\right)^k - \\ -\left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|} e^{-i\psi(\omega(\zeta))}\int_\Gamma \left(\Re e^{i\psi(\omega(\tau))}\sum_{k=0}^{|\kappa|-1} d_k \left(\omega(\tau)\right)^{k+\kappa}\right)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Далее, используя преобразования, аналогичные случаю $\kappa = 0$, доказываем, что функция

$$\Psi(\zeta) = \left(\omega(\zeta)\right)^{|\kappa|}\frac{e^{-i\psi(\zeta)}}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\Im\psi(\omega(t))} f(t)\frac{\omega(t)+\omega(\zeta)}{\omega(t)-\omega(\zeta)}\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)}$$

является решением задачи (3), а функция V_0 (функция (17)) – решение соответствующей однородной задачи. Таким образом, получаем, что при $\kappa < 0$ неоднородная задача всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет $2\kappa + 1$ линейно независимых над полем действительных чисел решений. Суммируя вышеизложенное, получаем следующую теорему.

Теорема. *Задача* G *при* $\kappa = 0$ *имеет решение для любой функции* $f \in C(\Gamma)$*, и соответствующая однородная задача имеет одно линейно независимое решение. При* $\kappa > 0$ *однородная задача не имеет нетривиальных решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимы и достаточны* $2\kappa - 1$ *линейно независимых условий* (13) *на функцию* f*. При* $\kappa < 0$ *неоднородная задача разрешима для любой функции* $f \in C(\Gamma)$*, а соответствующая однородная задача имеет* $2\kappa + 1$ *линейно независимых* *решений. Линейная зависимость рассматривается над полем действительных чисел.*

Южный федеральный университет, РФ
e-mail: bvazgen@gmail.com

В. А. Бабаян

О граничной задаче Гильберта в пространстве непрерывных функций

Исследуется граничная задача Гильберта в пространстве непрерывных функций. Предложена новая постановка этой задачи, которая позволяет решить ее, когда граничная функция непрерывна на Γ. В явном виде получены условия разрешимости неоднородной задачи, а также линейно независимые решения однородной задачи. Решение неоднородной задачи записывается в явном виде.

Վ. Ա. Բաբայան

Անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում Հիլբերտի եզրային խնդրի մասին

Ուսումնասիրվում է Հիլբերտի եզրային խնդիրը անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում: Առաջարկվում է խնդրի նոր դրվածք, որը թույլ է տալիս լուծել այն, երբ եզրային ֆունկցիան անընդհատ է Γ-ի վրա: Բացահայտ տեսքով ստացված են համասեռ խնդրի լուծելիության պայմանները, ինչպես նաև համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումները: Անհամասեռ խնդրի լուծումը գրվում է բացահայտ տեսքով:

V. A. Babayan

On a Hilbert Boundary Value Problem in the Space of Continuous Functions

The Hilbert boundary value problem in the space of continuous functions is investigated. It is introduced a new formulation of the problem, which allows to solve it when the boundary function is continuous. The conditions of the solvability of inhomogeneous problem and linearly independent solutions of the corresponding homogeneous problem are obtained in explicit form. The solution of the inhomogeneous problem is obtained in explicit form as well.

Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. Физматгиз. 1963. 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. ОГИЗ. 1945. 448 с.
3. *Айрапетян Г. М.* - Изв. АН Армении. Математика. 1990. Т. 25. No.1. С. 3-20.
4. *Айрапетян Г. М.*- ДАН СССР. 1993. Т. 328. №5. С.533-535.
5. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1984. 320 с.
6. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М. ИЛ. 1975. 312 с.