ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 114 2014 № 3
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций

(Представлено 19/ V 2014)

Ключевые слова: *Классы функций* $T_\beta\left(0 \le \beta < 1\right)$, $N_\alpha\left(-1 < \alpha < +\infty\right)$, *функция Альфорса–Сымидзу, произведения Бляшке, произведения Джрбашяна, оператор интегродифференцирования Риммана-Лиувилля, радиальный предел, емкость множества.*

Введение. Для данного значения $\beta\left(0 < \beta < 1\right)$ в класс T_β (см. [1]) входят мероморфные в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$, для которых

$$T_\beta(f) \equiv \int_0^1 (1-r)^{-\beta} A(r;f)\,dr < +\infty ,$$

где

$$A(r;f) = \iint_{|z|<r} \frac{\left|f'(z)\right|^2}{\left(1+\left|f(z)\right|^2\right)^2}\,dxdy$$

известная функция Альфорса – Сымидзу.

Известный результат Карлесона гласит ([1], теорема 3.3): для каждой функции $f(z) \in T_\beta$ радиальный предел $\lim\limits_{r\to 1-0} f\left(re^{i\theta}\right)$ существует и конечен для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1-\beta)$ – емкость нуль. Иначе говоря, множество E обладает свойством: для любой меры μ, сосредоточенной на E и такой, что $\mu(E) = 1$,

$$\lim_{r\to 1-0} \left\{ \max_{0\le\varphi\le 2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\theta)}{\left|1-re^{i(\varphi-\theta)}\right|^{1-\beta}} \right\} = +\infty .$$

Известно также, что если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in T_\beta$, то (см. [2])

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\beta |a_n|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Пусть $f(z)$ – произвольная функция из класса $L(0,l)$, $(0<l<+\infty)$. Оператор интегрирования (при $-1<\alpha<+\infty$) и оператор дифференцирования (при $-1<\alpha<0$) в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке определяются следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt, (0<\alpha<+\infty),$$

$$D^{-\alpha} f(r) \equiv \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)} f(r), (-1<\alpha<0).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r) \equiv f(r).$$

Далее, пусть

$$D_{(+)}^{-\alpha} f = \begin{cases} D^{-\alpha} f(r), \text{ если } D^{-\alpha} f(r) \ge 0 \\ 0, \qquad \text{если } D^{-\alpha} f(r) < 0 \end{cases}.$$

Пользуясь аппаратом операторов интегродифференцирования в смысле Римана – Лиувилля, М. М. Джрбашян (см. [3], гл. IX) ввел в рассмотрение классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, определив характеристическую функцию T_α следующим образом. Пусть для каждого значения $\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

$$m_\alpha(r;f) \equiv m_\alpha(r;\infty) = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

$$N_\alpha(r;f) \equiv N_\alpha(r;\infty) = \frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}(\log r - k_\alpha) +$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^r \frac{(r-t)^\alpha}{t} \left[n(t;\infty) - n(0;\infty)\right] dt,$$

где $k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, $n(0;\infty)$ – кратность возможного полюса функции f в точке $z=0$, $n(t;\infty)$ – число ее полюсов, лежащих в круге $|z| \le t (0<t<1)$ и отличных от $z=0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Класс $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ определяется посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r;f) \equiv m_\alpha(r;f) + N_\alpha(r;f)$$

как множество тех мероморфных в $|z|<1$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\left\{T_\alpha\left(r;f\right)\right\}<+\infty .$$

При этом функции $m_\alpha\left(r;f\right), N_\alpha\left(r;f\right)$ и $T_\alpha\left(r;f\right)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций (см. [4]) $m\left(r;f\right), N\left(r;f\right)$ и $T\left(r;f\right)$, совпадая с ними при $\alpha=0$. Таким образом $N_0\equiv N$.

Вместе с тем важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0=N\left(-1<\alpha<0\right).$$

Существенную роль (см. [3]) в факторизационной теореме функций классов $N_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ играют введенные М. М. Джрбашяном произведения B_α, которые определяются следующим образом. Пусть последовательность $\left\{z_n\right\}$ подчинена условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|z_n\right|\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ \left(0<\left|z_n\right|\le\left|z\right|_{n+1}<1, n=1,2,\ldots\right). \tag{2}$$

Тогда по определению

$$B_\alpha\left(z;\left\{z_n\right\}\right)=\prod_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{-W_\alpha\left(z,z_n\right)},$$

где для $|z|<1$ и $|\xi|<1$

$$W_\alpha\left(z;\xi\right)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{\left(1-x\right)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(1+\alpha+k\right)}{\Gamma\left(1+\alpha\right)\Gamma\left(1+k\right)}\left\{\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}\left(1-x\right)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\xi}^{\,k}\int_{|\xi|}^{1}\left(1-x\right)^\alpha x^{-k-1}dxdx\right\}z^k.$$

Далее пусть

$$g_\alpha\left(z\right)=C\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega\left(\theta\right)\right\},\ |z|<1, \tag{3}$$

где C – постоянное, $S_\alpha\left(z\right)=\Gamma\left(1+\alpha\right)\left\{\frac{2}{\left(1-z\right)^{1+\alpha}}-1\right\}$ – ядро М. М. Джрбашяна (типа Шварца), $\omega\left(\theta\right)$ – невозрастающая функция конечной вариации на $\left[0,2\pi\right]$.

Следующая теорема характеризует граничные свойства функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ ([5], теорема 2.9 при $\omega\left(x\right)=\left(1-x\right)^\alpha$).

Теорема А. *Если* $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$*, то предел*

$$F\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to1-0}F\left(re^{i\theta}\right)$$

существует для любого $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset [0, 2\pi]$, $(1+\alpha)$-емкость которого равна нулю.

Доказывается также, что эта теорема неулучшаема ([5], теорема 2.12, 2.13).

Определим класс $A_\alpha^* \left(-1 < \alpha \le 0\right)$ (см. [5], с.145) как множество тех аналитических в единичном круге функций f из N_α, которые имеют следующее представление:

$$f(z) = B_\alpha\left(z; \{z_n\}\right) g_\alpha(z). \tag{4}$$

Цель этой работы – получить более тонкие оценки для коэффициентов Тейлора функций этих классов.

Известно, что если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, является аналитической функцией из класса $N_\alpha\left(-1 < \alpha < +\infty\right)$, то (см. [5 - 7]) имеет место точная оценка, доказанная С. Н. Мергеляном при $\alpha = 0$, С. С. Степаняном при $-1 < \alpha < 0$ и И. В. Оганисяном при $-1 \le \alpha < +\infty$.

$$|a_n| \le \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1} \sqrt[\alpha+2]{C_\alpha\left(\alpha+1\right) n^{1+\alpha}} \left(1 + O(1)\right)\right\}, \ n \to \infty,$$

где C_α – некоторая постоянная.

Если же $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\left(|z| < 1\right)$ является функцией из класса $A_\alpha^* \left(-1 < \alpha \le 0\right)$ (см. [5], с.186; [8]), верна оценка

$$|a_n| = O\left(n^\alpha\right), n \to \infty. \tag{5}$$

Основные результаты. n-й коэффициент функции $f(z)$ будем обозначать, как обычно, через $\hat{f}(n)$. Первым результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$ *и пусть* $\{z_n\}$ *– любая последовательность комплексных чисел из единичного круга* $|z| < 1$ *такая, что выполняется условие (2). Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-\alpha} \left|\hat{B}_\alpha(n)\right|^2 < +\infty. \tag{6}$$

Доказательство. В работе [9] доказано, что при условии (2) $B_\alpha\left(z; \{z_n\}\right)$ принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Это означает, что соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$ *и пусть*

$$g_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta} z\right) d\omega(\theta)\right\}, \ |z| < 1,$$

где $\omega(\theta)$ *– невозрастающая функция конечной вариации на* $[0,2\pi]$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \left|\hat{g}_{\alpha}(n)\right|^2 < +\infty. \qquad (7)$$

Доказательство. Пользуясь определением ядра S_{α}, имеем

$$g_{\alpha}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega(\theta)\right\}.$$

В работе [9] доказано, что функция

$$k_{\alpha}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\theta)}{\left(1-e^{-i\theta}z\right)^{1+\alpha}}\right\}, \ |z|<1,$$

принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Следовательно соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Далее, пользуясь полученными результатами, докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $f(z)$ *– функция из класса* $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left|\hat{f}(n)\right|^2 < +\infty \qquad (8)$$

Доказательство. Так как $f(z)$ из класса A_{α}^{*}, то $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = B_{\alpha}(z;\{z_n\})\, g_{\alpha}(z).$$

Далее, так как $B_{\alpha}(z;\{z_n\})$ и $g_{\alpha}(z)$ являются функциями из класса $T_{-\alpha}$, то нетрудно убедиться, что $f(z)$ принадлежит классу $T_{-\alpha}$. Это означает, что соответственный ряд (1) сходится.

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание 1. Имеет место следующее включение:

$$A_{\alpha}^{*} \subset T_{-\alpha}, \alpha \in (-1;0].$$

Замечание 2. Полученная оценка для коэффициентов Тейлора функций класса $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$ позволяет получить более точную (чем пользуясь оценкой (5)) теорему для радиальных предельных значений функций классов $N_{\alpha}(-1<\alpha<0)$. А именно, теорема A непосредственно следует из теоремы 3, если иметь в виду, что любую функцию из класса $N_{\alpha}(-1<\alpha<0)$ можно представить как частное двух функций из класса $A_{\alpha}^{*}(-1<\alpha<0)$.

Отметим, что теорема A была доказана с использованием параметрического представления для функций классов N_{α}.

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, И. В. Оганисян

О коэффициентах Тейлора одного класса аналитических в круге функций

М. М. Джрбашяном введены классы $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ мероморфных в единичном круге функций и произведения B_α, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с классом N Неванлинны и произведениями Бляшке. Карлесоном ранее были введены другие классы T_β, входящие в класс N, которые существенно отличаются от классов $N_\alpha(-1<\alpha<0)$. Для коэффициентов Тейлора аналитических функций этих классов известны различные оценки. Для коэффициентов Тейлора функций из подкласса A_α^* классов $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ получена оценка нового типа.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի Թեյլորի գործակիցների մասին

Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ներմուծվել են միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ դասեր և B_α արտադրյալներ, որոնք $\alpha=0$ հատուկ դեպքում համընկնում են Ռ. Նևանլիննայի N դասի և Բլյաշկեի արտադրյալների հետ: Ավելի վաղ Կառլեսոնի կողմից ներմուծվել էին միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների T_β դասերը, որոնք ընկած են N դասում, բայց էապես տարբերվում են $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ դասերից: Դուրս են բերվում նոր տիպի գնահատականներ $N_\alpha(-1<\alpha<0)$ դասերի A_α^* ենթադասերի ֆունկցիաների Թեյլորի գործակիցների համար:

Academician V. S. Zakaryan, I. V. Hovhannisyan

On Taylor Coefficients of a Class of Functions Analytic in Disc

Classes $N_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ and products $B_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ are introduced by M. M. Djrbashyan which in the special case $\alpha=0$ are identical with Nevanlinna class and Blaschke product. Classes T_β are introduced by L. Carleson and $T_0 \equiv N_0 \equiv N$. In this paper new type estimations are found for Taylor coefficients of functions from subclass $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$ of $N_\alpha(-1<\alpha<0)$.

Литература

1. *Carleson L.* On a class of meromorphik functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala, 1950. 127 p.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Изв. АН Арм ССР. Математика. 1967. Т. 2. N5. С. 275-294.
3. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
4. *Nevanllina R.* Einduetige Analytische Functionen. Springer. Berlin1. 937. 388 с.
5. *Джрбашян М. М., В. С. Захарян* - Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 217 с.
6. *Степанян С. С.* - ДАН Арм. ССР. 1982. Т. 35. N3. С. 107-113.
7. *Оганисян И. В.* Некоторые дополнительные свойства функций класса М. М. Джрбашяна. Деп. в Арм. НИИНТИ. 4.9 (1989). N49-Ар.
8. *Оганисян И. В.*- ДАН Арм ССР. 1989. Т. 88, N2, С. 55-60.
9. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - ДАН СССР. 1967. Т. 173. N6. С. 1247-1250.