ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 114 2014 № 3
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно-линейных функций

(Представлено 16/ IV 2014)

Ключевые слова: *общая система Франклина, базисность, пространство Харди.*

В недавней работе авторов [1] определена и исследована система из кусочно-линейных функций, определенных на R. Напомним определение этой системы.

Определение 1. *Последовательность (разбиение)* $T=\{t_n : n\ge 0\}$ *называется допустимой (на* R*), если* T *всюду плотно в* R *и* $t_i \ne t_j$*, когда* $i\ne j$.

Для допустимой последовательности $T=\{t_n : n\ge 0\}$ и $n\ge 1$ обозначим $T_n=\{t_i : 0\le i\le n+1\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n=\{\tau_i^n : \tau_i^n\le\tau_{i+1}^n, 0\le i\le n\}$, $\pi_n=T_n$. Через S_n обозначается пространство непрерывных на R функций f с носителем $[\tau_0^n;\tau_{n+1}^n]$ и линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n;\tau_{i+1}^n]$, $i=0,1,...,n$. Очевидно, что $\dim S_n=n$ и $S_n\subset$ $\subset S_{n+1}$. Следовательно, для $n\ge 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $f\in S_n$, которая ортогональна S_{n-1}, и $\|f\|_2=1$. Эта функция называется n-й функцией Франклина на R^1, соответствующей разбиению T.

Определение 2. *Общая система Франклина на* R^1 $\{f_n(x) : n\ge 1\}$ *соответ - ствующая разбиению* T*, определяется по правилу:* $f_1(x)$ *– это норми - рованный в* $L_2(R)$ B*-сплайн, соответствующий точкам* t_0,t_1,t_2*, и для* $n\ge 2$ *функция* $f_n(x)$ *является* n*-й функцией Франклина, соответствующей разбиению* T.

Из всюду плотности на R последовательности T следует, что $\bigcup_{n\ge 2} S_n$ всюду плотно в $L_p(R)$, $1\le p<\infty$. Поэтому система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_p(R)$, $1\le p<\infty$.

Через $K_n(t,\tau)$ обозначим n-е ядро Дирихле системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, т.е.

$$K_n(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n} f_k(t) f_k(\tau)\,. \qquad (1)$$

В работе [1] доказано, что

$$\int_R |K_n(x,t)|\,dt \le 3\,, \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x-t|>\delta} |K_n(x,t)|\,dt = 0, \text{ для любого } \delta > 0.$$

Для системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в работе [1], в частности, сформулированы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in C(R)$ *с компактным носителем частичные суммы* $S_n(f,x)$ *ряда Фурье по системе* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходятся к* $f(x)$ *на* R .

Теорема 2. *Пусть* $T=\{t_n : n\ge 0\}$ *– допустимая последовательность на* R *, тогда соответствующая ей система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является базисом в* $L_p(R)$ *для* $1\le p<\infty$.

Теорема 3. *Для каждой допустимой последовательности на* R *соответствующая ей система Франклина на* R^1 *является безусловным базисом в* $L_p(R)$ *,* $1<p<\infty$.

Напомним определение системы Стромберга [2]. Пусть N – множество натуральных чисел, $R_0 = N\cup\{0\}\cup\{-n/2 : n\in N\}$ и $R_{1/2}=R_0\cup\{1/2\}$. Через S_0 и $S_{1/2}$ обозначим множества непрерывных и кусочно-линейных функций из $L_2(R)$, соответственно, с узлами из R_0 и $R_{1/2}$. Существует единственная функция $f\in S_{1/2}$ со свойствами: f ортогональна S_0, $\|f\|_2=1$ и $f(1/2)>0$. Далее полагается, что $f_{jk}(x)=2^{j/2} f(2^j x-k)$, $j,k\in Z$, где Z – множество целых чисел. Стромберг [2] доказал, что система $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(R)$, а также безусловным базисом в $L_p(R)$, $1<p<\infty$, и $H^1(R)$.

Отметим, что система Стромберга $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$, в отличие от общей системы Франклина на R^1, не является базисом в $L_1(R)$, поскольку $\int_R f_{jk}(x)dx=0,\ j,k\in Z.$ Не известно, существует ли одноиндексная нумерация системы $\{f_{jk}(x)\}_{j,k\in Z}$, при которой частичные суммы ряда Фурье–Стромберга непрерывной функции с компактным носителем локально равномерно сходятся.

Отметим также, что для общей системы Франклина на R^1 определен ряд Фурье для каждой локально интегрируемой функции, чего нельзя сказать о системе Стромберга. Но эта система не является базисом в $H^1(R)$, так как интегралы функций этой системы не равны нулю.

Здесь мы определим класс систем из кусочно-линейных функций с компактным носителем, которые образуют базис в пространстве $H^1(R)$.

Пусть $T=\{t_n : n\geq 0\}$ – допустимая последовательность, а $T_n=\{t_i : 0\leq \leq i\leq n+1\}$ и $\pi_n=\{\tau_i^n : \tau_i^n\leq \tau_{i+1}^n, 0\leq i\leq n\}$ определены, как выше. Через S_n^0 обозначим пространство непрерывных на R функций F с носителем $[\tau_0^n;\tau_{n+1}^n]$, линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n;\tau_{i+1}^n]$, $i=0,1,...,n$, и с нулевым интегралом. Очевидно, что $S_1^0=\{0\}$, $\dim S_n^0=n-1$ и $S_n^0\subset S_{n+1}^0$ для $n\geq 1$. Следовательно, для $n\geq 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $F\in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|F\|_2=1$. Эта функция называется n-й функцией Франклина в $H^1(R)$, соответствующей разбиению T.

Определение 3. *Общая система Франклина в* $H^1(R)$ $\{F_n(x) : n\geq 2\}$, *соответствующая разбиению* T, *определяется по правилу: для* $n\geq 2$ $F_n(x)$ *это* n*-я функция Франклина в* $H^1(R)$, *соответствующая разбиению* T.

Пусть $D_n(t,\tau)$ – ядро проектора из пространства $L_{loc}(R)$ в S_n^0. Верна следующая

Лемма 1. *Для* $D_n(t,\tau)$ *имеет место представление*

$$D_n(t,\tau)=K_n(t,\tau)-\sum_{i=1}^{n} a_i^n N_i(t)\sum_{j=1}^{n} K_n(\tau_j^n,\tau)(\lambda_j^n+\lambda_{j+1}^n), \tag{3}$$

где $K_n(t,\tau)$ *определяется формулой (1),* $\lambda_j^n=\tau_j^n-\tau_{j-1}^n$, *а коэффициенты* a_i^n *определяются формулами*

$$a_i^n=\frac{\int_R K_n(\tau_i^n,\tau)d\tau}{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^n+\lambda_{j+1}^n)\int_R K_n(\tau_j^n,\tau)d\tau}. \tag{4}$$

Из соотношений (1)-(4) выводится

Лемма 2. *Для* $D_n(t,\tau)$ *имеет место* $\int_R |D_n(t,\tau)|d\tau<6$.

Отсюда получается

Теорема 1. Пусть T – допустимая последовательность. Тогда соответствующая ей система $\{F_n(x) : n\geq 2\}$ является базисом в пространстве $L_0^1(R)$, где $L_0^1(R)$ – пространство интегрируемых на R функций с нулевым интегралом.

С применением леммы 1 и свойств ядра $K_n(t,\tau)$ доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть допустимая последовательность* T *такая, что соответствующая ей система* $\{F_n(x) : n\geq 2\}$ *является базисом в про-*

странстве $H^1(R)$. *Тогда существует постоянная* $\gamma>1$ *такая, что для всех* n *выполняются*

$$\gamma^{-1}\le\frac{\lambda_i^n+\lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n+\lambda_{i+2}^n}\le\gamma\text{, когда } i=1,2,...,n-1. \tag{4}$$

Лемма 4. *Пусть допустимая последовательность* T *такая, что соответствующая ей система* $\{F_n(x):n\ge2\}$ *является базисом в пространстве* $H^1(R)$. *Тогда существует постоянная* $\beta>0$ *такая, что для всех* n *выполняются*

$$\lambda_1^n+\lambda_2^n\ge\beta\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^n \quad и \quad \lambda_n^n+\lambda_{n+1}^n\ge\beta\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^n\,. \tag{5}$$

Оказывается, что условия (4), (5) также достаточны. А именно верна следующая

Теорема 2. Пусть T – допустимая последовательность и $\{F_n(x):n\ge2\}$ – соответствующая ей система. Тогда $\{F_n(x):n\ge2\}$ является базисом в пространстве $H^1(R)$ тогда и только тогда, когда выполняются (4) и (5).

Отметим, что разбиения отрезка $[0;1]$, для которых выполняются условия, аналогичные условиям (4), называются регулярными по парам. В работе [3] доказано, что общая система Франклина на $[0;1]$ является базисом в $H^1[0;1]$ тогда и только тогда, когда порождающее ее разбиение регулярно по парам. Аналогичная теорема для периодической общей системы Франклина доказана в работе [4]. Как указано в теореме 2, для $H^1(R)$ добавляется еще условие (5).

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-1A006.

Ереванский государственный университет

Академик Г. Г. Геворкян, К. А. Керян

Об одном базисе пространства $H^1(R)$, состоящем из кусочно-линейных функций

Построен класс ортонормированных в $L^2(R)$ систем, состоящих из кусочно-линейных функций. Получены необходимые и достаточные условия на порождающую последовательность, при которых соответствующая система будет базисом в $H^1(R)$.

Ակադեմիկոս Գ. Գ. Գևորգյան, Կ. Ա. Քեռյան

$H^1(R)$-ում կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներից կազմված մի բազիսի մասին

Կառուցված է $L^2(R)$-ում օրթոնորմավորված, կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներից կազմված համակարգերի դաս: Ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ ծնող տրոհման վրա, որոնց դեպքում համապատասխան համակարգը կլինի բազիս $H^1(R)$–ում:

Academician G. G. Gevorgyan, K. A. Keryan

On a Basis in $H^1(R)$, Consisting of Piesewise Linear Functions

A class of orthonormal in $L^2(R)$ systems, consisting of piecewise linear functions is constructed. Necessary and sufficient conditions in terms of generating partition are obtained for the corresponding system to be a basis in $H^1(R)$.

Литература

1. *Геворкян Г. Г., Керян К. А.* – ДНАН РА. 2013. Т. 113. № 4. С. 331-336.
2. *Stromberg J.*-O. In: Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math. Wadsworth, Belmont, CA. 1983. P. 475–494.
3. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* – Studia Math. 2005. V. 167. P. 259 – 292.
4. *Keryan K. A., Pogosyan M. P.* – J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. № 1. P. 56-79.