

УДК 539.3

Р. К. Алексанян, В. А. Едоян

О кручении призматического стержня из материала с цилиндрической анизотропией

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 14/ХІІ 2012)

Ключевые слова: *призматический стержень, цилиндрическая анизотропия, логарифмическая спираль.*

1. Предполагается, что материал скручиваемого стержня обладает свойством цилиндрической анизотропии с одной плоскостью упругой симметрии, совпадающей с поперечным сечением стержня, а ось анизотропии материала стержня – совпадающей с осью oz координатной системы. Стержень подвергается кручению моментами M_z , действующими на его торцевых сечениях. Задачам кручения посвящены работы [1-8]. Для однородного стержня рассматриваемая нами задача приближённо решена при помощи рядов по степеням физического малого параметра [2]. В случае составного стержня исследовано поведение напряжений в окрестности угловой точки клиновидного поперечного сечения [3].

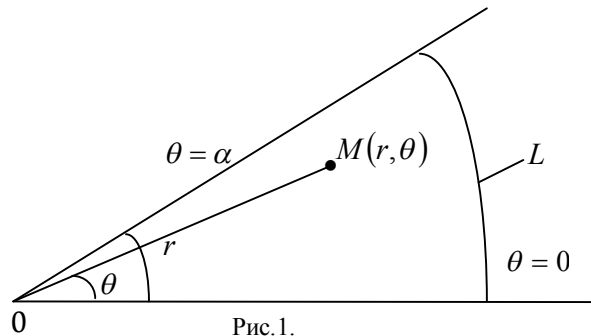


Рис.1.

Поперечное сечение скручиваемого стержня в полярной системе координат показано на рис. 1. Замыкающая часть L контура поперечного сечения стержня будет определена в ходе решения задачи.

Функция напряжений $F(r, \theta)$ при кручении удовлетворяет дифференциальному уравнению [1-3]

$$a_{44} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - 2a_{45} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + a_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + a_{44} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = -2\nu, \quad (1.1)$$

где ν – относительный угол закручивания, a_{ik} – упругие постоянные материала стержня, удовлетворяющие условиям [1, 2]

$$a_{44} > 0, \quad a_{55} > 0, \quad a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0. \quad (1.2)$$

Напряжения σ_{rz} и $\sigma_{\theta z}$ определяются при помощи функции напряжения $F(r, \theta)$ следующим образом:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\partial F}{\partial r}. \quad (1.3)$$

Функция напряжений на контуре области поперечного сечения стержня должна удовлетворять граничным условиям

$$F(r, \theta)|_{\theta=0} = 0, \quad F(r, \theta)|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (a)$$

$$F(r, \theta)|_L = 0.$$

(b)

Решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1), представим в виде

$$\overline{F(r, \theta)} = r^\lambda \Phi(\theta). \quad (1.4)$$

Относительно $\Phi(\theta)$ получим дифференциальное уравнение

$$a_{55}\Phi''(\theta) - 2a_{45}\Phi'(\theta) + a_{44}\lambda^2\Phi(\theta) = 0. \quad (1.5)$$

Если $\Phi(\theta) = Ae^{k\theta}$, то, удовлетворяя уравнению (1.5), получим характеристическое уравнение относительно k

$$a_{55}k^2 - 2\lambda a_{45}k + a_{44}\lambda^2 = 0. \quad (1.6)$$

Решением уравнения (1.6) на основании условий (1.2) является

$$k = \lambda(\delta \pm i\nu), \quad (1.7)$$

где

$$\sigma = \frac{a_{45}}{a_{55}}, \quad \nu = \frac{(a_{44}a_{55} - a_{45}^2)^{1/2}}{a_{55}}.$$

Общее решение (1.5) представляется в виде суммы независимых решений

$$\Phi(\theta) = A_1 e^{\lambda(\sigma+i\nu)\theta} + A_2 e^{\lambda(\sigma-i\nu)\theta}$$

или

$$\Phi(\theta) = e^{\lambda\sigma\theta} (A \cos \lambda\nu\theta + B \sin \lambda\nu\theta). \quad (1.8)$$

Для функции напряжений $F(r, \theta)$ получим следующее представление:

$$F(r, \theta) = r^\lambda e^{\lambda\sigma\theta} (A \cos \lambda\nu\theta + B \sin \lambda\nu\theta) + F_0(r, \theta), \quad (1.9)$$

где $F_0(r, \theta)$ – частное решение уравнения (1.1).

Удовлетворяя граничным условиям (a), на основании (1.8) получим систему уравнений

$$\begin{cases} r^\lambda (A \cdot 1 + B \cdot 0) = 0 \\ r^\lambda e^{\lambda \sigma \alpha} (A \cos \lambda \nu \alpha + B \sin \lambda \nu \alpha) = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Из условия существования нетривиального решения получим

$$A = 0, \sin \lambda \nu \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{\pi k}{\nu \alpha}. \quad (1.11)$$

В случае, когда точка $r = 0$ принадлежит области поперечного сечения стержня, собственные значения должны быть положительными – $\lambda_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$). В обратном случае $\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$.

В первом случае $F(r, \theta)$ представим в виде

$$F(r, \theta) = F_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\lambda_k(\sigma\theta + \ln r)} \cdot \sin \lambda_k \nu \theta. \quad (1.12)$$

Во втором случае имеем представление

$$F(r, \theta) = F_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k e^{\lambda_k(\sigma\theta + \ln r)} + B_{-k} e^{-\lambda_k(\sigma\theta + \ln r)} \right] \sin \lambda_k \nu \theta$$

или

$$F(r, \theta) = F_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k \operatorname{ch} \lambda_k (\sigma\theta + \ln r) + D_k \operatorname{sh} \lambda_k (\sigma\theta + \ln r) \right] \sin \lambda_k \nu \theta. \quad (1.13)$$

Частное решение $F_0(r, \theta)$ уравнения (1.1) представим в виде

$$F_0(r, \theta) = r^2 f_0(\theta) + C_0 r^2, \quad (1.14)$$

где

$$f_0(\theta) = e^{2\sigma\theta} [A_0 \cos 2\nu\theta + B_0 \sin 2\nu\theta],$$

где A_0, B_0, C_0 – произвольные постоянные.

Удовлетворяя граничным условиям (а) и уравнению (1.1), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4C_0 a_{44} = -2\nu \\ r^2 (A_0 + C_0) = 0 \\ r^2 e^{2\sigma\alpha} [A_0 \cos 2\nu\theta + B_0 \sin 2\nu\theta] + C_0 r^2 = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Из системы уравнений (1.15) имеем

$$C_0 = -\frac{\nu}{2a_{44}}, \quad A_0 = -C_0, \quad B_0 = C_0 \frac{\cos 2\nu\alpha - e^{-2\delta\alpha}}{\sin 2\nu\alpha}. \quad (1.16)$$

2. На основании (1.3) находим следующие значения для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= r^2 f_0'(\theta) + \sum_{(\lambda_k)} r^{\lambda_k - 1} \Phi_k'(\lambda_k, \theta), \\ \sigma_{\theta z} &= -\sum_{(\lambda_k)} \lambda_k r^{\lambda_k - 1} \Phi_k'(\lambda_k, \theta) - 2r f_0'(\theta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В случае, когда точка $r = 0$ принадлежит секториальной области поперечного сечения стержня, напряжения, определяемые по формулам (2.1), неограниченно возрастают при $r \rightarrow 0$, если

$$0 < \lambda_1 < 1 \quad \text{или} \quad 0 < \frac{\pi}{\alpha} \frac{a_{55}}{(a_{44}a_{55} - a_{45}^2)^{1/2}} < 1, \quad (2.2)$$

в случае скручиваемого стержня из ортотропного материала имеем

$$0 < \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} < 1, \quad (2.3)$$

а в случае изотропного материала получим условие

$$0 < \frac{\pi}{\alpha} < 1 \quad \text{или} \quad \alpha > \pi. \quad (2.4)$$

3. Рассмотрим возможности удовлетворения граничных условий на замыкающих частях области поперечного сечения. Ясно, что эти возможности необходимо оценить с точки зрения точного или приближенного удовлетворения рассматриваемых граничных условий. Сама форма построенных фундаментальных решений задачи указывает на существование семейства кривых, на которых граничные условия можно точно удовлетворить.

В случае, когда $r = 0$ принадлежит области поперечного сечения, имеем общее решение задачи в форме

$$F(r, \theta) = F_0(r, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\lambda_k(\sigma\theta + \ln r)} \cdot \sin \lambda_k \nu \theta, \quad (3.1)$$

которое удовлетворяет граничным условиям на лучах $\theta = 0$ и $\theta = \alpha$.

Если предположить, что замыкающая часть L контура поперечного сечения стержня определяется уравнением

$$\sigma\theta + \ln r = \ln r_0 \quad \text{или} \quad r = r_0 e^{-\sigma\theta},$$

то, удовлетворяя граничному условию (b), получим

$$F(r, \theta)|_L = 0 \Rightarrow F_0(r, \theta)|_L + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{\lambda_k \ln r_0} \cdot \sin \lambda_k \nu \theta = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k r_0^{\lambda_k} \cdot \sin \lambda_k \nu \theta = -F_0(r_0 e^{-\sigma\theta}, \theta),$$

откуда

$$B_k = \frac{2}{\alpha r_0^{\lambda_k}} \int_0^{\alpha} F_0(r_0 e^{-\sigma\theta}, \theta) \sin \frac{k\pi}{\alpha} \theta d\theta.$$

В случае, когда $r = 0$ не принадлежит области поперечного сечения стержня, предположим, что замыкающие контуры L_1 и L_2 области сечения определяются уравнениями

$$\sigma\theta + \ln r = \ln r_1, \quad \sigma\theta + \ln r = \ln r_2, \quad r_1 < r_2. \quad (3.2)$$

Определенная по формуле (1.13) функция напряжений на этих кривых должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} [C_k ch(\lambda_k \ln r_1) + D_k sh(\lambda_k \ln r_1)] \cdot \sin \frac{k\pi}{\alpha} \theta &= -F_0(r_1 e^{-\sigma\theta}, \theta), \\ \sum_{k=1}^{\infty} [C_k ch(\lambda_k \ln r_2) + D_k sh(\lambda_k \ln r_2)] \cdot \sin \frac{k\pi}{\alpha} \theta &= -F_0(r_2 e^{-\sigma\theta}, \theta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из системы уравнений для C_k и D_k получим значения

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\Delta} [a_k sh(\lambda_k \ln r_2) - b_k sh(\lambda_k \ln r_1)], \\ D_k &= \frac{1}{\Delta} [b_k ch(\lambda_k \ln r_1) - a_k ch(\lambda_k \ln r_2)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= sh\left(\lambda_k \ln \frac{r_2}{r_1}\right), \\ a_k &= -\frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} F_0(r_1 e^{-\sigma\theta}, \theta) \sin \frac{k\pi}{\alpha} \theta d\theta, \\ b_k &= -\frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} F_0(r_2 e^{-\sigma\theta}, \theta) \sin \frac{k\pi}{\alpha} \theta d\theta, \end{aligned}$$

$$\Delta = sh(\lambda_k \ln r_2) ch(\lambda_k \ln r_1) - sh(\lambda_k \ln r_1) ch(\lambda_k \ln r_2).$$

4. В [6, 7] рассматривались задачи кручения призматических однородных или составных анизотропных стержней с поперечными сечениями в виде секториальных областей.

Имеются следующие однородные уравнения, соответствующие неоднородным уравнениям для функций напряжений при кручении:

а) в случае прямолинейной анизотропии с одной плоскостью упругой симметрии

$$a_{44} F_{xx} - 2a_{45} F_{xy} + a_{55} F_{yy} = 0; \quad (4.1)$$

б) в случае ортотропного материала

$$a_{44} F_{xx} + a_{55} F_{yy} = 0; \quad (4.2)$$

в) в случае цилиндрической анизотропии с одной плоскостью упругой симметрии

$$a_{44} F_{rr} - 2a_{45} \frac{1}{r} F_{r\theta} + a_{55} \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + a_{44} \frac{1}{r} F_r = 0. \quad (4.3)$$

Решения рассматриваемых уравнений, удовлетворяющие на $\theta = \text{const}$ линиям нулевым граничным условиям, на выбранных замыкающих частях контура области поперечного сечения ортогональны в интервалах изменения полярного угла θ или в соответствующих интервалах изменения “приведенных” углов. Таким образом, получается, что в зависимости от характера анизотропии каждое уравнение определяет соответствующие семейства кривых, на которых решения уравнений ортогональны. В случаях

а) и б) выбраны контуры дуги эллипсов, в случае в) – дуги логарифмических спиралей.

Уравнения (4.1) и (4.2), когда $a_{44} = a_{55}$ и $a_{45} = 0$ станут уравнениями Лапласа, и уравнение (4.3) при $a_{45} = 0$ имеют решения, ортогональные на дугах $r = \text{const}$.

Ереванский государственный университет
архитектуры и строительства

Р. К. Алексанян, В. А. Едоян

О кручении призматического стержня из материала с цилиндрической анизотропией

Рассматривается задача кручения призматического стержня из материала с цилиндрической анизотропией, имеющего одну плоскость упругой симметрии, совпадающую с плоскостью поперечного сечения в виде сектора. Функция напряжений определяется в виде суммы собственных функций соответствующей однородной и частным решением неоднородной краевой задачи. На непрямолинейных краях сечения в виде дуг логарифмических спиралей, обусловленных анизотропией, собственные функции ортогональны в рассматриваемом интервале полярного угла. На основе ортогональности системы собственных функций удовлетворяются также гетерогенные граничные условия на непрямолинейные края.

Ռ. Կ. Ալեքսանյան, Վ. Հ. Եդոյան

Չլանային անիզոտրոպիա ունեցող նյութից պրիզմատիկ ձողի ոլորման մասին

Դիտարկվում է առաձգական սիմետրիայի մեկ հարթություն ունեցող զլանային անիզոտրոպ նյութից պատրաստված պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը, երբ ձողի սեկտորի տեսքով ընդլայնական հատվածքի և առաձգական սիմետրիայի հարթությունները համընկնում են: Լարումների ֆունկցիան որոշվում է համապատասխան համասեռ եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների և ոլորման խնդրի մասնակի լուծման գումարի տեսքով: Ձողի ընդլայնական հատվածքի ոչ ուղղագծային եզրերի վրա նյութի զլանային անիզոտրոպիայով պայմանավորված լոգարիթմական սպիրալային աղեղների վրա սեփական ֆունկցիաները օրթոնորմալ են բևեռային անկյան փոփոխման դիտարկվող միջակայքում: Սեփական ֆունկցիաների համակարգի օրթոգոնալության հիման վրա բավարարվում են նաև անհամասեռ եզրային պայմանները ոչ ուղղագծային եզրերի վրա:

R. K. Aleksanyan, V. H. Edoyan

On Torsion of a Prismatic Rod Made of a Material with the Cylindrical Anisotropy

The problem of a prismatic rod torsion made of a material with the cylindrical anisotropy, having a plane of the elastic symmetry coinciding with the plane of cross-

section in the form of sector is considered. The function of stresses is determined in the form of respective boundary problem's eigenfunctions sum satisfying homogeneous boundary conditions on the straight-line edges of the rod's cross-section. On non straight-line edges of the cross-section in the form of logarithmic helical arcs, conditioned by cylindrical anisotropy, eigenfunctions are orthogonal within the considered interval of polar angle. On the basis of the eigenfunctions system orthogonality heterogeneous boundary conditions on non straight-line edges are also satisfied.

Литература

1. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. М. 1954. 707 с.
2. *Векуа И.Н., Рухадзе А.К.* - ПММ.1933. Т.1. Вып.2. С.167-178.
3. *Чобанян К.С.* Напряжения в упругих составных телах. Ереван. Изд. АН АрмССР. 1987. 338 с.
4. *Саркисян В.С.* - ДАН АрмССР. 1965. Т.40. №2. С.81-87.
5. *Геворкян С.Х.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1968. Т. 21. №4. С.30-39.
6. *Алексян Р.К., Чобанян К.С.* - Прикладная механика. 1977. Т. 13. №6. С.90-96.
7. *Алексян Р. К., Мелик-Саркисян С. А.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1978. Т.31. №1. С.40-49.
8. *Лехницкий С. Т.* Теория упругости анизотропного тела. М.-Л., Гостехтеориздат. 1950. 299 с.