ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 114 2014 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 519.68:510

С. А. Нигиян

Арифметические функции с неопределенными значениями аргументов. Вычислимость и λ-определимость

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 5/IX 2013)

Ключевые слова: *арифметическая функция, неопределенное значение аргумента, вычислимость, λ-определимость.*

Рассматриваются арифметические функции с неопределенными значениями аргументов. Эти функции определены на частично-упорядоченном множестве $M=N\cup\{\perp\}$, где N – множество натуральных чисел, $\perp$ – элемент, соответствующий неопределенному значению. Каждый элемент множества M сравним только с самим собой и с элементом $\perp$, который является наименьшим элементом множества M. Понятие монотонной функции определяется традиционным образом. Функция называется естественно расширенной, если при неопределенном значении какого-либо из аргументов ее значение равно $\perp$. Всякая естественно расширенная функция монотонна. Далее для арифметических функций с неопределенными значениями аргументов вводятся понятия: вычислимости, сильной вычислимости, λ-определимости. Доказывается, что всякая λ-определимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов монотонна и вычислима. Определяется класс частично рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов. Такие функции будут естественно расширенными. Доказывается λ-определимость частично рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов. Доказывается существование монотонных, не естественно расширенных, сильно вычислимых арифметических функций с неопределенными значениями аргументов, которые не λ-определимы. Доказывается также существование монотонных, не естественно расширенных, сильно вычислимых арифметических функций с неопределенными значениями аргументов, которые λ-определимы.

1. Арифметические функции с неопределенными значениями аргументов. Пусть $M=N\cup\{\perp\}$, где $N=\{0,1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $\perp$ – элемент, соответствующий неопределенному значению. Введем на множестве M частичный порядок $\subseteq$. Для всякого $m\in M$ имеем: $\perp\subseteq m$ и $m\subseteq m$. Всякое отображение $\varphi:M^k\to M$, $k\geq 1$, назовем арифметической функцией с неопределенными значениями аргументов.

Функцию φ назовем вычислимой, если существует алгоритм [1], который для всяких $m_1,\ldots,m_k \in M$ останавливается со значением $\varphi(m_1,\ldots,m_k)$, если $\varphi(m_1,\ldots,m_k) \neq \perp$ и функционирует бесконечно, если $\varphi(m_1,\ldots,m_k)=\perp$.

Функцию φ назовем сильно вычислимой, если существует алгоритм [1], который для всяких $m_1,\ldots,m_k \in M$ останавливается со значением $\varphi(m_1, \ldots, m_k)$.

Функцию φ назовем монотонной, если для всяких $(m_1,\ldots,m_k)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, где $m_i \subseteq \mu_i$, $m_i, \mu_i \in M$, $i=1,\ldots,k$, имеем: $\varphi(m_1,\ldots,m_k) \subseteq \varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)$.

Функцию φ назовем естестественно расширенной, если $\varphi(\ldots,\perp,\ldots)=\perp$. Легко видеть, что всякая естественно расширенная функция монотонна.

Определим индуктивно класс частично-рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов, которые будут естественно расширенными функциями.

1. Следующие базисные функции: o, s, $I_{k,i}$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 1$, являются частично рекурсивными функциями с неопределенными значениями аргументов. Для всяких $m, m_1,\ldots,m_k \in M$, имеем:

$o(m)$ равно 0, если $m \in N$, и равно $\perp$, если $m=\perp$,

$s(m)$ равно $m+1$, если $m \in N$, и равно $\perp$, если $m=\perp$,

$I_{k,i}(m_1,\ldots,m_k)$ равно m_i, если $m_1,\ldots,m_k \in N$, и равно $\perp$ в противном случае.

2. Функция $\varphi: M^k \to M$, $k \geq 1$, полученная из частично рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов либо посредством операции канонической подстановки, либо посредством операции примитивной рекурсии, либо посредством операции минимизации, будет частично рекурсивной функцией с неопределенными значениями аргументов. Операции канонической подстановки и минимизации определяются точно так же, как в классическом случае (для функций без неопределенных значений аргументов), (см. [1]), в схеме же примитивной рекурсии $\varphi(m_1,\ldots, m_{k-1},0)= =m \in M$ и добавляется равенство $\varphi(m_1,\ldots,m_{k-1},\perp)=\perp$, где $m_1,\ldots,m_{k-1} \in M$.

Легко видеть, что всякая частично рекурсивная функция с неопределенными значениями аргументов, полученная посредством применения только двух видов операций: канонической подстановки и примитивной рекурсии, будет сильно вычислимой.

2. λ-определимость арифметических функций с неопределенными значениями аргументов. Приведем необходимые определения и результаты, которые берутся из [2]. Зафиксируем счетное множество переменных V. Определим множество термов Λ:

1) если $x \in V$, то $x \in \Lambda$;

2) если $t_1,t_2 \in \Lambda$, то $(t_1 t_2) \in \Lambda$;

3) если $x \in V$ и $t \in \Lambda$, то $(\lambda x t) \in \Lambda$.

Введем сокращенную запись термов: терм $(\ldots (t_1 t_2)\ldots,t_k)$, где $t_i \in \Lambda$, $i=1,\ldots k$, $k>1$, условимся обозначать $t_1 t_2 \ldots t_k$; терм $(\lambda x_1(\lambda x_2(\ldots(\lambda x_n t)\ldots)$, где $x_j \in V$, $t \in \Lambda$, $j=1,\ldots,n$, $n>0$, условимся обозначать $\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.t$.

Традиционным образом вводятся понятия свободного и связанного вхождения переменной в терм, понятие свободной и связанной переменной терма. Терм, не содержащий свободных переменных, назовем замкнутым.

Термы t_1 и t_2 назовем конгруэнтными (обозначим $t_1 \equiv t_2$), если один терм можно получить из другого переименованием связанных переменных. Далее мы не будем отличать конгруэнтные термы.

Подстановку терма τ в терм t вместо всех свободных вхождений переменной x (обозначим $t[x:=\tau]$) назовем допустимой, если ни одна свободная переменная терма τ не связывается в результате подстановки. Мы будем рассматривать только допустимые подстановки.

Напомним понятие β-редукции:

$$\beta = \{((\lambda x.t)\tau,\ t[x:=\tau]) \mid t,\tau \in \Lambda,\ x \in V\}.$$

Одношаговая β-редукция ($\to_\beta$), β-редукция ($\to\!\!\to_\beta$) и β-равенство ($=_\beta$) определяются обычным образом. Далее условимся отношение $\to_\beta$ обозначать $\to$, отношение $\to\!\!\to_\beta$ обозначать $\to\!\!\to$, отношение $=_\beta$ обозначать $=$, т. е. опуская символ β.

Напомним, что терм $(\lambda x.t)\tau$ называется β-редексом (далее просто редексом), а терм $t[x:=\tau]$ – его сверткой. Терм, не содержащий редексов, называется β-нормальной формой (далее просто нормальной формой). Множество всех нормальных форм условимся обозначать NF. Будем говорить, что терм t имеет нормальную форму, если существует такой терм $t' \in NF$, что $t=t'$. Терм вида $\lambda x_1x_2\ldots x_n.xt_1t_2\ldots t_k$, где $x,x_i \in V$, $t_j \in \Lambda$, $i=1,\ldots,n$, $n \ge 0$, $j=1,\ldots,k$, $k \ge 0$, называется головной нормальной формой. Множество всех головных нормальных форм условимся обозначать HNF. Будем говорить, что терм t имеет головную нормальную форму, если существует такой терм $t' \in HNF$, что $t=t'$. Известно, что $NF \subset HNF$, но $HNF \not\subset NF$.

Мы будем широко использовать следствие теоремы Черча–Россера (CR-теоремы), утверждающее, что для любого терма $t \in \Lambda$ имеет место следующее:

$$1)\ t=t',\ t' \in NF \ \Rightarrow t \to\!\!\to t',$$

$$2)\ t=t',\ t=t'',\ \ t',t'' \in NF \ \Rightarrow\ t' \equiv t''.$$

Напомним, что, если терм имеет нормальную форму, то она достижима посредством левой редукции (при левой редукции всякий раз сворачивается самый левый редекс).

Мы также будем использовать следующее утверждение: если терм t не имеет головной нормальной формы, то для любого терма τ терм $t\tau$ также не будет иметь головной нормальной формы.

Введем обозначения для некоторых термов, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

$$I \equiv \lambda x.x,\ \ T \equiv \lambda xy.x,\ \ F \equiv \lambda xy.y,\ \ \Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx),$$

$$\underline{\text{if}}\ t_1\ \underline{\text{then}}\ t_2\ \underline{\text{else}}\ t_3 \equiv t_1t_2t_3,\ \ Zero \equiv \lambda x.xT,$$

$$\langle\bot\rangle \equiv \Omega,\ \ \langle 0\rangle \equiv I,\ \ \langle n+1\rangle \equiv \lambda x.xF\langle n\rangle, \text{ где } x,y \in V,\ \ t_1,t_2,t_3 \in \Lambda,\ \ n \in N.$$

Легко видеть, что: терм Ω не имеет головной нормальной формы, $\underline{\text{if}}$ T $\underline{\text{then}}$ t_2 $\underline{\text{else}}$ $t_3 = t_2$, $\underline{\text{if}}$ F $\underline{\text{then}}$ t_2 $\underline{\text{else}}$ $t_3 = t_3$, $Zero\langle 0\rangle = T$, $Zero\langle n+1\rangle = F$, $Zero\langle\bot\rangle$ не иммеет головной нормальной формы, терм $\langle n\rangle$ является замккнутой нормальной формой, причем, если $n_1 \ne n_2$, то термы $\langle n_1\rangle$ и $\langle n_2\rangle$ не конгруэнтны, $\langle n\rangle TII = I$, где $n,n_1,n_2 \in N$.

Введем понятие λ-определимости для арифметических функций с неопределенными значениями аргументов. Функцию $\varphi:M^к\to M$, $k\geq 1$, назовем λ-определимой, если существует терм $\Phi\in\Lambda$ такой, что для любых $m_1,\ldots,m_k\in M$ имеем:

$\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle = \langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$, если $\varphi(m_1,\ldots,m_k)\neq\perp$ и

$\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle$ не имеет головной нормальной формы, если $\varphi(m_1,\ldots,m_k)=\perp$.

В этом случае будем говорить, что терм Φ λ-определяет функцию φ.

Теорема 1. *Всякая λ-определимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов монотонна.*

Доказательство. Пусть $\varphi:M^к\to M$, $k\geq 1$, и терм Φ λ-определяет функцию φ. Пусть $(m_1,\ldots,m_k)\subseteq(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, где $m_i,\mu_i,\in M$, $i=1,\ldots,k$, покажем, что $\varphi(m_1,\ldots,m_k)\subseteq\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)$. Если $\varphi(m_1,\ldots,m_k)=\perp$, то утверждение очевидно. Пусть $\varphi(m_1,\ldots,m_k)\neq\perp$, тогда $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle=\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$. Согласно пункту 1 следствия CR-теоремы имеем: $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle\to\to\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$. Заметим, что, если $m_i\subseteq\mu_i$ и $m_i\neq\mu_i$, то $m_i,=\perp$, $i=1,\ldots,k$, и, т. к. $\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle\in NF$, то $\Phi\langle\mu_1\rangle\ldots\langle\mu_k\rangle\to\to\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$, и $\Phi\langle\mu_1\rangle\ldots\langle\mu_k\rangle=\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$, т. е. $\Phi\langle\mu_1\rangle\ldots\langle\mu_k\rangle$ имеет нормальную форму. Следовательно $\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)\neq\perp$, $\Phi\langle\mu_1\rangle\ldots\langle\mu_k\rangle = =\langle\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)\rangle$ и $\langle\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)\rangle\in NF$. Согласно пункту 2 следствия CR-теоремы имеем: $\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle\equiv\langle\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)\rangle$, т. е. $\varphi(m_1,\ldots,m_k)=\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, откуда следует, что $\varphi(m_1,\ldots,m_k)\subseteq\varphi(\mu_1,\ldots,\mu_k)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Всякая λ-определимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов вычислима.*

Доказательство. Пусть $\varphi:M^к\to M$, $k\geq 1$, и терм Φ λ-определяет функцию φ. Пусть $m_1,\ldots,m_k\in M$, приведем алгоритм вычисления функции φ на $m_1,\ldots,m_k$. Имея $m_1,\ldots,m_k$, построим терм $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle$. Если $\varphi(m_1,\ldots,m_k)\neq\perp$, то $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle$ имеет нормальную форму и согласно следствию CR-теоремы левая редукция терма $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle$ заканчивается нормальной формой $\langle\varphi(m_1,\ldots,m_k)\rangle$, декодировав которую получим значение $\varphi(m_1,\ldots, m_k)$. Если же $\varphi(m_1,\ldots,m_k)=\perp$, то терм $\Phi\langle m_1\rangle\ldots\langle m_k\rangle$ не имеет нормальной формы и согласно следствию CR-теоремы левая редукция терма $\Phi\langle m_1\rangle \ldots \langle m_k\rangle$ будет бесконечной, что соответствует бесконечному функционированию алгоритма в данном случае.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Всякая частично рекурсивная функция с неопределенными значениями аргументов λ-определима.*

Доказательство. 1. Приведем термы O, S, $U_{k,i}$, $1\leq i\leq k$, $k\geq 1$, λ-определяющие базисные функции o, s, $I_{k,i}$, $1\leq i\leq k$, $k\geq 1$, соответственно:

$O \equiv \lambda x.(xTII)\langle 0\rangle$, $S \equiv \lambda yx.(yTII)xFy$, $U_{k,i} \equiv \lambda x_1\ldots x_k.(x_1TII)\ldots(x_kTII)x_i$.

2. Термы, λ-определяющие функции, полученные из λ-определимых арифметических функций с неопределенными значениями аргументов посредством операций канонической подстановки, примитивной рекурсии и минимизации, строятся точно так же, как строятся термы в случае арифметических функций без неопределенных значений аргументов (см. [2]).

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Существуют монотонные, не естественно расширенные, сильно вычислимые арифметические функции с неопределенными значениями аргументов, которые не λ-определимы.*

Доказательство. Приведем пример такой функции $\&:M^2\to M$. Для лю-бых $m_1,m_2\in M$ имеем:

$\&(m_1,m_2)$ равно 0, если $m_1=0$ или $m_2=0$,

равно 1, если m_1, $m_2\neq\perp$ и m_1, $m_2\geq 1$,

равно $\perp$ в остальных случаях.

Легко видеть, что функция & монотонная, не естественно расширенная, сильно вычислимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов. Покажем, что функция & не λ-определима. Предположим противное, пусть существует терм Φ, который λ-определяет функцию &. Рассмотрим терм Φxy, где x,y – различные переменные, не свободные в Φ. Т. к. $\&(0,\perp)=0$, то $\Phi I\Omega=I$ и левая редукция терма Φxy не может привести к терму, в котором y есть самое левое свободное вхождение переменной, находящееся левее всех редексов, т. к. в этом случае терм $\Phi I\Omega$ не будет иметь нормальной формы. С другой стороны, т. к. $\&(\perp,0)=0$, то $\Phi\Omega I=I$ и левая редукция терма Φxy не может привести к терму, в котором x есть самое левое свободное вхождение переменной, находящееся левее всех редексов, т. к. в этом случае терм $\Phi\Omega I$ не будет иметь нормальной формы. Отсюда следует, что левая редукция терма Φxy приведет к терму I, следовательно левая редукция терма $\Phi\Omega\Omega$ также приведет к терму I, и $\Phi\Omega\Omega=I$, противоречие, т. к. $\&(\perp,\perp)=\perp$ и терм $\Phi\Omega\Omega$ не имеет нормальной формы. Таким образом, не сушествует терма Φ, λ-определяющего функцию &, т. е. функция & не λ-определима.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Существуют монотонные, не естественно расширенные, сильно вычислимые арифметические функции с неопределенными значениями аргументов, которые λ-определимы.*

Доказательство. Приведем пример такой функции $\text{and}:M^2\to M$. Для любых $m_1,m_2\in M$ имеем:

$\text{and}(m_1,m_2)$ равно 0, если $m_1=0$ или $m_1\neq\perp$, $m_1\geq 1$, $m_2=0$,

равно 1, если m_1, $m_2\neq\perp$ и m_1, $m_2\geq 1$,

равно $\perp$ в остальных случаях.

Легко видеть, что and монотонная, не естественно расширенная, сильно вычислимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов. Приведем терм And, λ-определяющий функцию and:

$$\text{And} \equiv \lambda xy.\ \underline{\text{if}}\ \text{Zero}\ x\ \underline{\text{then}}\ \langle 0\rangle\ \underline{\text{else}}\ (\underline{\text{if}}\ \text{Zero}\ y\ \underline{\text{then}}\ \langle 0\rangle\ \underline{\text{else}}\ \langle 1\rangle).$$

Теорема 5 доказана.

Ереванский государственный университет

С. А. Нигиян

Арифметические функции с неопределенными значениями аргументов. Вычислимость и λ-определимость

Рассматриваются арифметические функции с неопределенными значениями аргументов. Эти функции определены на частично-упорядоченном множестве $M=N\cup\{\perp\}$, где N – множество натуральных чисел, $\perp$ – элемент, соответствующий неопределенному значению. Каждый элемент множества M сравним только с самим собой и с элементом $\perp$, который является наименьшим элементом множества M. Понятие монотонной функции определяется традиционным образом. Функция называется естественно расширенной, если при неопределенном значении какого-либо из аргументов ее значение равно $\perp$. Всякая естественно расширенная функция монотонна. Далее для арифметических функций с неопределенными значениями аргументов вводятся понятия вычислимости, сильной вычислимости, λ-определимости. Доказывается, что всякая λ-определимая арифметическая функция с неопределенными значениями аргументов монотонна и вычислима. Определяется класс частично рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов. Такие функции будут естественно расширенными. Доказывается λ-определимость частично рекурсивных функций с неопределенными значениями аргументов. Доказывается существование монотонных, не естественно расширенных, сильно вычислимых арифметических функций с неопределенными значениями аргументов, которые не λ-определимы. Доказывается также существование монотонных, не естественно расширенных, сильно вычислимых арифметических функций с неопределенными значениями аргументов, которые λ-определимы.

Ս. Ա. Նիգիյան

Արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիաներ: Հաշվարկելիություն և λ-որոշելիություն

Աշխատանքում դիտարկվում են արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիաներ: Այդ ֆունկցիաները որոշված են $M=N\cup\{\perp\}$ մասնակի կարգավորված բազմության վրա, որտեղ N-ը բնական թվերի բազմությունն է, իսկ $\perp$-ը տարր է, որը համապատասխանում է անորոշ արժեքին: M բազմության կամայական տարր համեմատելի է միայն ինքն իր և $\perp$-ի հետ, որը M բազմության փոքրագույն տարրն է: Մոնոտոն ֆունկցիայի գաղափարը սահմանվում է սովորական եղնակով: Ֆունկցիան կոչվում է բնական ընդլայնված, եթե արգումենտներից որևէ մեկի անորոշ լինելու դեպքում նրա արժեքը հավասար է $\perp$-ի: Կամայական բնական ընդլայնված ֆունկցիան մոնոտոն է: Այնուհետև արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիաների համար ներմուծվում են հաշվարկելիության, ուժեղ հաշվարկելիության, λ-որոշելիության գաղափարները: Ապացուցվում է, որ կամայական λ-որոշելի արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիան մոնոտոն է և հաշվարկելի: Սահմանվում է արգումենտների անորոշ արժեքներով մասնակի կարգընթաց ֆունկցիաների դաս: Այդպիսի ֆունկցիաները կլինեն բնական ընդլայնված: Ապացուցվում է արգումենտների անորոշ արժեքներով մասնակի կարգընթաց ֆունկցիաների λ-որոշելիությունը: Ապացուցվում է մոնոտոն, բնական չընդլայնված, ուժեղ հաշվարկելի արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիաների գոյությունը, որոնք λ-որոշելի չեն: Ապացուցվում է նաև մոնոտոն, բնական չընդլայնված, ուժեղ հաշվարկելի արգումենտների անորոշ արժեքներով թվաբանական ֆունկցիաների գոյությունը, որոնք λ-որոշելի են:

S. A. Nigiyan

Arithmetical Functions with Indeterminate Values of Arguments. Computability and λ-definability

Arithmetical functions with indeterminate values of arguments are considered. These functions are defined on partially ordered set M=N∪{⊥}, where N is the set of natural numbers, ⊥ is the element, which corresponds to indeterminate value. Each element of M is comparable with itself and with ⊥, which is the least element of M. The notion of monotonic function is introduced in a conventional way. A function is named to be naturally extended, if its value is ⊥ whenever the value at least one of the argument is ⊥. We introduce notions of computability, strong computability, and λ-definability for arithmetical functions with indeterminate values of arguments. It is proved that every λ-definable arithmetical function with indeterminate values of arguments is monotonic and computable. The class of partially recursive functions with indeterminate values of arguments is defined. The λ-definability for partially recursive functions with indeterminate values of arguments is proved. It is proved that there exist monotonic, not naturally extended, strong computable arithmetical functions with indeterminate values of arguments, which are not λ-definable. It is also proved that there exist monotonic, not naturally extended, strong computable arithmetical functions with indeterminate values of arguments, which are λ-definable.

Литература

1. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М. Наука. 1986. 367 с.
2. *Барендрегт Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М. Мир. 1985. 606 с.