

кратится только в том случае, когда текущие значения АД и уровня активности ССН станут равными P_n и C_n соответственно. В системе барорецепторного рефлекса равновесие достигается в точке пересечения функциональных кривых f_1 и f_2 , значение которой соответствует уровню нормального АД (P_n на оси y) при оптимальной активности ССН (C_n на оси x) [1].

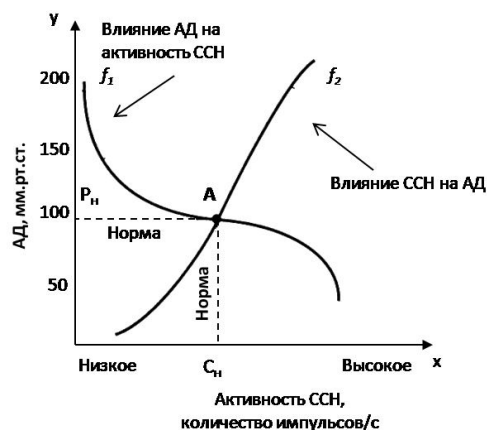


Рис. 1. Равновесное состояние регуляторной артериальной барорецепторной системы [1].

Объектом настоящего исследования является реализованная на основе гибридных автоматов математическая модель регуляции равновесия в системе артериального барорецепторного рефлекса, описывающая событийно-управляемый процесс принятия равновесного состояния. В работе рассматривается вопрос о влиянии угла наклона функциональных кривых взаимозависимостей АД и ССН на временные характеристики модели.

Краткое описание гибридной модели регуляции равновесия артериальной барорецепторной системы. Непрерывно-дискретные системы, или гибридные автоматы, представляют собой последовательность сменяющих друг друга непрерывных и событийно-зависимых дискретных поведений и позволяют описать как пребывание модели в длительных состояниях при заданных условиях, так и смену режимов с наступлением определенных изменений [3].

Барорецепторная регуляция артериального давления представляет собой событийно-управляемую динамическую систему, где изменения (события) возникают по принятию переменных величин (АД и ССН) значений, отвечающих определенным требованиям (условиям). В гибридной модели артериальной барорецепторной регуляции (рис. 2) пребывание системы в соответствующих состояниях определяют процессы, направленные на изменение модуля значений АД и ССН, условия переходов системы из одного состояния в другое обеспечивают характер (вектор) изменения значений АД и ССН. В этой связи смена состояния модели происходит при сдвигах (наступление события) в системе, связанных с принятием АД и ССН значений,

удовлетворяющих определенным условиям смены режима состояния системы [4].

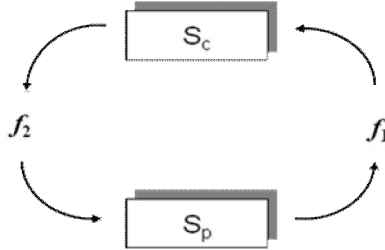


Рис. 2. Применение гибридного автомата к системе барорецепторной регуляции АД. S_c – гибридный автомат, отображающий систему генерации симпатического импульса от нейрональной части барорецепторного рефлекса, S_p – гибридный автомат, отображающий ответную реакцию сердечно-сосудистой системы в виде изменения значения АД. Функции f_1 и f_2 представляют собой зависимости соответственно уровня активности ССН от величины АД и изменения величины АД от активности ССН.

В непрерывно-дискретной модели регуляции равновесия артериальной барорецепторной системы [5] в качестве гибридного автомата определен набор $S = (A, Q, Z, B, \varphi, \omega, \psi, q, z)$ с выделенными начальными параметрами $q \in Q, z \in Z$, где A, Z, B – конечные множества натуральных чисел, которые являются соответственно входным алфавитом, алфавитом состояния и выходным алфавитом автомата S , $Q = \{1, -1, 0\}$ – алфавит режима автомата S , φ – функция перехода автомата S , определенная на множестве $A \times Z$ и принимающая значение из множества Q , ω – функция внутреннего состояния автомата S , определенная на множестве $Z \times Q$ и принимающая значение из множества Z , ψ – функция выхода автомата S , определенная на множестве Z и принимающая значение из множества B .

При условии, что f_1 – строго убывающая функция, значения которой составляют конечное множество $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ возможных входных значений гибридного автомата $S_c = (C, B, Q, Z, \varphi, \omega, \psi, \theta, c_k)$, где $c_k \in C$, описывающего изменение уровня активности ССН в ответ на изменения величины АД, а f_2 – строго возрастающая функция, значения которой составляют конечное множество $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ возможных входных значений гибридного автомата $S_p = (P, B, Q, Z, \varphi, \omega, \psi, \theta, p_k)$, где $p_k \in P$, описывающего характер изменения величины АД в ответ на изменение уровня активности ССН, на плоскости $[C \times P]$, где $C \in [0; c_{\max}]$, $P \in [0; p_{\max}]$ (c_{\max} и p_{\max} – максимально допустимые значения АД и уровня активности ССН в системе барорецепторного рефлекса), гибридные автоматы S_c и S_p при любых отклонениях величин АД и уровня активности ССН приводят систему барорецепторного рефлекса в равновесное состояние [5].

Если на плоскости $[C \times P]$ обозначить точкой $A \in (f_1, f_2)$ с координатами (c_0, p_0) , где $c_0 \in f_1, p_0 \in f_2$ – точку пересечения функциональных кривых f_1 и f_2 , точкой $K \in [C \times P]$ – произвольную точку с координатами (c_k, p_k) , отображающую состояние системы при ее отклонении от нормального равновесного состояния (рис. 3), тогда гибридные автоматы S_c и S_p приводят

точку K в точку A , соответственно изменяя координаты c_k и p_k таким образом, что $c_k \rightarrow c_0$ и $p_k \rightarrow p_0$ [5].

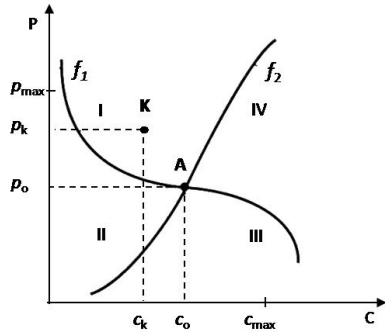


Рис.3 Расположение точки $K(c_k, p_k)$ на плоскости $[C \times P]$ в области деятельности барорецепторного рефлекса с точкой $A(c_0, p_0)$ в состоянии равновесия.

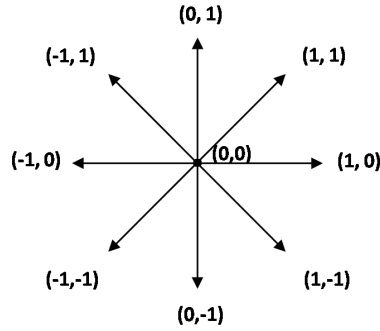


Рис. 4 Направления движения точки K при определенных значениях (q_c, q_p) режима модели. Паре $(0,0)$ соответствует нулевое направление.

Определение траектории движения точки K в зависимости от углов наклона функциональных кривых f_1 и f_2 . В результате работы автоматов S_c и S_p точка K может двигаться в следующих 9 направлениях (рис. 4), которые определяются парой (q_c, q_p) , где q_c и q_p значения режима q_t автоматов S_c и S_p соответственно в момент времени τ [5]. Значение пары (q_c, q_p) по сути является режимом модели и в целом отражает ее поведение (движение точки K) в конкретный момент времени. При $(q_c, q_p) = \{(0, 1), (0, -1)\}$ и $(q_c, q_p) = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ точка K располагается соответственно на функциональных кривых f_1 и f_2 , и направление ее движения является параллельным относительно осей C и P соответственно; при $(q_c, q_p) = \{(-1, 1), (-1, -1), (1, -1), (1, 1)\}$ точка K находится в областях I, II, III, IV соответственно, которые условно образуются функциональными кривыми f_1 и f_2 (рис. 3), и направление ее движения составляет 45° относительно осей C и P .

Большинство артериальных барорецепторов имеет повышенную чувствительность при значениях АД от 70 до 140 мм рт. ст., и функции f_1 и f_2 при колебаниях величины АД в этом диапазоне имеют почти линейную зависимость [6]. Для упрощения допустим, что в зоне наибольшей активности артериальных барорецепторов f_1 – монотонно убывающая и f_2 – монотонно возрастающая линейные функции (рис. 5). Расположим точку K в области I и обозначим через α_1, α_2 и β , где $\alpha_1 \in]0^\circ; 90^\circ[$, $\alpha_2 \in]90^\circ; 180^\circ[$, $\beta \in]0^\circ; 180^\circ[$, $\alpha_1 \leq \beta < \alpha_2$ – углы наклона относительно оси C соответственно функциональных прямых f_2, f_1 и отрезка KA , длина которого представляет собой модуль полного перемещения точки $K(c_k, p_k)$ в точку $A(c_0, p_0)$, причем $|KA| > 0$ (рис. 5). Поскольку $c_0 \in f_1, p_0 \in f_2$ и $c_k \rightarrow c_0, p_k \rightarrow p_0$, следовательно $c_k \rightarrow f_1, p_k \rightarrow f_2$, т. е. в результате движения точка K в зависимости от своего расположения в области I (значение угла β) либо достигнет прямой f_1 или f_2 , либо попадет в точку A , где $c_k \in f_1$ и $p_k \in f_2$.

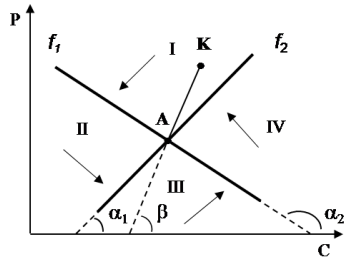


Рис.5. Замена функциональных кривых f_1 и f_2 одноименными линейными функциями на плоскости $[PxС]$ с точкой K в области I. Стрелками указан вектор перемещения точки K в каждой области. α_1, α_2 , и β – углы наклона функциональных прямых f_1, f_2 и отрезка KA соответственно.

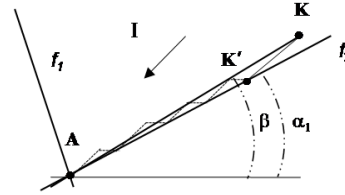


Рис.6 Траектория движения точки K в области I при $\alpha_1 < 45^\circ, \beta < 45^\circ$. Замена ломаной линии с начальной точкой K' и конечной точкой A на отрезок $K'A$.

Движение точки K в области I осуществляется в соответствии с режимом модели* в данной области. При $\alpha_1 < \beta < 45^{0**}$ (рис. 6) условие $p_k \in f_2$ выполнится раньше условия $c_k \in f_1$, что повлечет за собой изменение режима на $(-1,0)$, в результате чего точка K вернется обратно в область I с соответствующим данной области режимом $(-1,-1)$ и т. д. Чередование режимов продлится до тех пор, пока $c_k = c_0$ и $p_k = p_0$.

Траектория движения точки K в данном случае представляет собой ломаную линию, каждая вторая вершина которой располагается на прямой f_2 . Если пренебречь однотактовыми переключениями режима $(-1,0)$ на $(-1,-1)$, то траектория точки K при ее перемещении в точку A представит собой ломаную линию, состоящую из двух отрезков KK' и $K'A$ (рис. 6). В частном случае, при $\alpha_1 = \beta \leq 45^\circ$ (рис.7), т.е. когда точка K располагается непосредственно на прямой f_2 , за путь точки K в точку A принимается отрезок KA .

При $\alpha_1 < 45^\circ$ и $\beta > 45^\circ$ (рис. 8) условие $c_k \in f_1$ выполнится раньше условия $p_k \in f_2$, и точка K покинет I область, не достигнув точки A , после чего попадет во II область плоскости $[С x P]$, где траектория ее движения будет определяться по схожим правилам согласно режиму $(1,-1)$ и соответствующему вектору перемещения, который составляет 135° относительно оси C .

Вышесказанное позволяет заключить, что поведение точки K в области своего исходного расположения (в данном случае область I) зависит от величины угла β (значение которого в свою очередь ограничено величинами углов α_1 и α_2), а именно: при $\beta \leq 45^\circ$ точка K попадает в точку A , не покидая пределы области I; при $\beta > 45^\circ$ точка K не попадает в точку A в области I и переходит в область II.

* Далее режим.

** Условие $\alpha_1 \leq \beta < \alpha_2$ для области I подразумевается во всех описанных случаях.

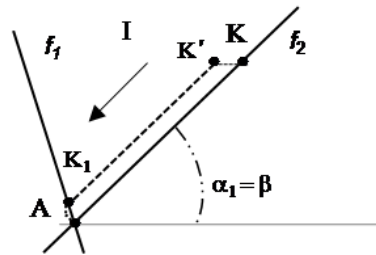


Рис. 7 Траектория движения точки K при ее расположении на прямой f_2 при $\alpha_1 = \beta = 45^\circ$. Ввиду малой длины отрезка KK' допускаем, что отрезок $K'K_1$ находится на отрезке KA , который и принимается за длину пути точки K в точку A .*

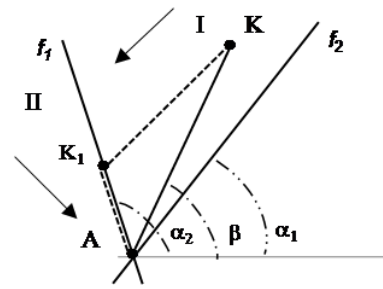


Рис. 8 Траектория точки K при $\alpha_1 < 45^\circ$, $\beta > 45^\circ$, $\alpha_2 \leq 135^\circ$. Точка K попадает в точку A в области II. Отрезок K_1A заменяет ломаную линию с начальной и конечной точками K_1 и A соответственно (рис.6). За длину пути принимается сумма отрезков $KK_1 + K_1A$.

В пределах области II поведение точки K становится зависимым от значения α_2 – угла наклона функции f_1 . При $\alpha_2 \leq 135^\circ$ (рис. 8) траекторию движения точки K в области II можно представить в виде отрезка K_1A , и полный путь в точку A будет состоять из суммы отрезков KK_1 и K_1A .

При условии $\alpha_2 > 135^\circ$ (рис. 9) точка K не достигает точки A в области II и, пересекая функции f_2 в точке K_2 с режимом (1,0), переходит в область III, которой соответствует режим (1,1). Далее, согласно свойству равенства вертикальных углов [7], поведение точки K в области III и IV будут определять значения α_1 и α_2 – углы наклона прямых f_2 и f_1 соответственно (рис. 10).

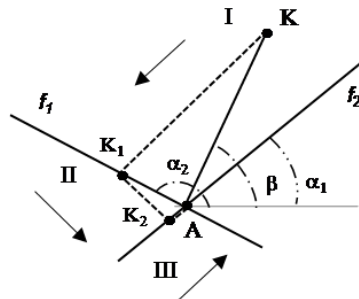


Рис. 9 Траектория точки K при $\alpha_1 < 45^\circ$, $\beta > 45^\circ$, $\alpha_2 > 135^\circ$. Длина пути точки K в точку A равна сумме отрезков $KK_1 + K_1K_2 + K_2A$.

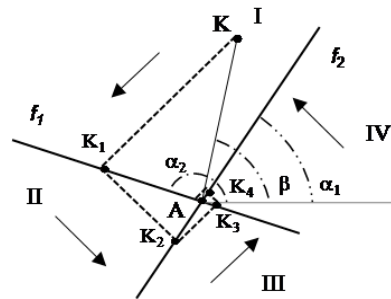


Рис. 10 Траектория точки K при $\alpha_1 > 45^\circ$, $\beta > 45^\circ$, $\alpha_2 > 135^\circ$. Длина пути точки K в точку A равна сумме отрезков, пройденных точкой K в каждой области: $KK_1 + K_1K_2 + \dots + K_{n-1}K_n + K_nA$.

Если точка K не совпала с точкой A в области IV, то она перейдет в область I и продолжит движение с соответствующими данной области

*Здесь и в последующих случаях подобное допущение возможно, если $KK' \ll K'K_1$

режимом и вектором перемещения, при этом ее траектория будет зависеть от значения α_1 угла наклона прямой f_2 .

Рассуждения относительно траектории движения точки K при ее начальном расположении в областях II, III и IV с соответствующим каждой области соотношением углов α_1 , α_2 и β те же, что и в области I.

Исходя из вышесказанного можно утверждать о прямом влиянии углов наклона α_1 и α_2 прямых f_1 и f_2 относительно оси S на длину пути точки K при ее перемещении в точку A . Поскольку длину пути точки K можно принять за время, в течение которого происходит ее перемещение в точку A , то за время возврата гибридной системы в состояние равновесия можно принять длину пути точки K , пройденного для ее совпадения с точкой A . При этом длина пути будет равна сумме пройденных в каждой области отрезков $KK_1 + K_1K_2 + \dots + K_{n-1}K_n + K_nA$, где K_1, K_2, \dots, K_n являются вершинами ломаной прямой, которые образуются при попадании точки K на функциональные прямые f_1 и f_2 , в результате чего имеет место изменение направления движения (режима) точки K . За минимальное время возврата точки K в равновесное состояние можно принять длину пути, равную модулю перемещения точки K в точку A (длина отрезка KA), что возможно, когда точка $K(c_k, p_k) \in f_2$ при $\alpha_1 = 45^\circ$ или $K(c_k, p_k) \in f_1$ при $\alpha_2 = 135^\circ$ (рис. 7). Наиболее длинный путь при том же начальном расположении точки K наблюдается при условии одновременного принятия углами наклона функциональных прямых f_1 и f_2 значений $\alpha_1 > 45^\circ$ и $\alpha_2 > 135^\circ$ (рис. 10). В этом случае траектория точки K аналогична спирали, которая вращается вокруг точки A с конечным числом витков. При $c_{k(t)} \approx c_o$ и $p_{k(t)} \approx p_o$ принимается, что условие $c_k = c_o$ и $p_k = p_o$ выполнено, т.е. точка K совпала с точкой A .

Итак, можно заключить, что углы наклона функциональных кривых зависимостей величины АД от уровня активности ССН и изменения уровня активности ССН от значения АД, непосредственно влияют на поведение и, как следствие, на время возврата в равновесное состояние модели регуляции равновесия в системе артериального барорецепторного рефлекса.

Автор благодарен академику К. Г. Карагезяну за внимание к работе.

Институт тонкой органической химии им. А. Мнджояна
НТЦ ОФХ НАН РА

М. Э. Ширинян

Влияние функциональных параметров механизма барорефлекса на характеристики математической модели регуляции равновесия в системе артериальной барорецепции

Рассматривается математическая модель регуляции равновесного состояния в системе артериального барорецепторного рефлекса в состоянии покоя на основе гибридного автомата. Описано влияние угла наклона функциональных кривых взаимозависимостей величин артериального давления и уровня сердечно-сосудистой

симпатической активности на поведение модели и время ее возврата в состояние равновесия.

Մ. Է. Շիրինյան

Բարոռեցեպտոր ռեֆլեքսի մեխանիզմի ֆունկցիոնալ պարամետրերի ազդեցությունը զարկերակային բարոռեֆլեքսի համակարգում հավասարակշռության կարգավորման մաթեմատիկական մոդելի բնութագրերի վրա

Ուսումնասիրված է զարկերակային բարոռեֆլեքսի համակարգում՝ հանգիստ վիճակում հավասարակշռության կարգավորման մաթեմատիկական մոդելը՝ հիմնված հիբրիդ ավտոմատների գործունեության սկզբունքների վրա: Նկարագրված է իրարից կախման մեջ գտնվող զարկերակային ճնշման և սիրտ-անոթային սիստոլիկ ակտիվության ցուցանիշների ֆունկցիոնալ կորերի թեքության անկյան ազդեցությունը մոդելի բնութագրերի նրա վարքի և հավասարակշիռ վիճակին վերադարձալու ժամանակի վրա:

M. E. Shirinyan

The Influence of the Functional Parameters of Arterial Baroreflex Mechanism on the Characteristics of the Mathematical Model of Equilibrium Regulation in the Arterial Baroreceptor System

The hybrid automata based mathematical model of equilibrium regulation in the arterial baroreflex system in the state of quiescence is considered. The influence of the inclination angle of the functional curves of the interrelationship between arterial pressure and cardio-vascular sympathetic activity on model behavior and time of return into the state of equilibrium has been described.

Литература

1. *Морман Д., Хеллер Л.* Физиология сердечно-сосудистой системы. СПб. Питер. 2000. 256 с.
2. *Фундаментальная и клиническая физиология.* Под ред. А.Г. Камкина, А.А. Каменского. М. Изд. центр «Академия». 2004. 1072 с.
3. *Сениченков Ю.Б.* Основы теории и средства моделирования гибридных систем. Автореф. докт. дис. СПб. 2005.
4. *Сениченков Ю.Б.* Численное моделирование гибридных систем. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2004. 206 с.
5. *Ширинян М.Э.* – Доклады НАН Армении. 2013. Т. 113, № 1. С. 99-108.
6. *Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Фаворский А.П.* Математические модели квази-одномерной гемодинамики. Метод. пособие. М. МАКС Пресс. 2010. 114 с.
7. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. М. Наука. 1981. 723 с.