ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.1

Л. А. Мовсисян

К нелинейным колебаниям цилиндрической панели из пьезоэлектрика

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 28/II 2013)

Ключевые слова: *пьезоэлектрик, нелинейная частота, амплитуда, резонанс.*

Изучаются одномерные нелинейные колебания цилиндрической панели для двух пьезоэлектриков. Нелинейность геометрического происхождения на уровне теории Кармана. Для изотропного материала такая задача приводится в [1]. Уравнения только относительно времени получены как в [1]. Однако их исследование уже основано на [2, 3].

Целью настоящей статьи является выяснение, как пьезоэлектрик влияет на частоты и амплитуды колебаний.

1.Уравнение свободных изгибных колебаний панели [1]

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}-\frac{T_2}{R}+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_2\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

К нему должна быть присоединена система электростатики (напряженность электрического поля и электрическая индукция)

$$rot\overline{E}=0,\ div\overline{D}=0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что оболочка полностью покрыта металлическим слоем, поэтому электрический потенциал принимается как [4,5]

$$\Phi=F\left(y,t\right)\left(1-\frac{4z^2}{h^2}\right). \tag{1.3}$$

Величины, необходимые для пьезоэлектрика $6m\overline{m}$ [4]:

$$\sigma_y=b_{22}e_y-e_1E_3,\ D_2=\varepsilon_1E_2,\ D_3=e_1e_y+\varepsilon_2E_3. \tag{1.4}$$

Тогда согласно классической теории оболочек для кольцевого усилия и изгибающего момента имеем

$$\begin{gathered}T_2=C_{22}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],\\ M_2=-D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{2}{3}e_1hF.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Из (1.2) и (1.3) получим связь между w и F :

$$\frac{2}{3}\varepsilon_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\frac{8}{h^2}\varepsilon_2 F+e_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \tag{1.6}$$

Из условия, что края панели закреплены в кольцевом направлении $v(0,t)=v(b,t)=0$, для среднего значения кольцевого усилия будем иметь

$$T_2=\frac{C_{22}}{b}\left[\frac{1}{R}\int_0^b w\,dy+\frac{1}{2}\int_0^b\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy\right]. \tag{1.7}$$

В предположении, что на краях имеются условия

$$w=M_2=F=0,\ \text{при}\ \ y=0\ \ \text{и}\ \ y=b, \tag{1.8}$$

функции w и F можно искать в виде

$$W=f(t)\sin\lambda\varphi,\ \ F=\varphi(t)\sin\lambda\varphi,\ \ \lambda=\frac{\pi}{b}. \tag{1.9}$$

Тогда из (1.1), (1.5) и (1.7), применяя метод Галеркина, получим [2,3]

$$\frac{d^2 f}{dt^2}+\omega^2 f+\alpha_2 f^2+\alpha_3 f^3=0,$$

$$\omega^2=\frac{D}{\rho h},D=\left(D_{22}\lambda^4+\frac{8C_{22}}{\pi^2R^2}+\frac{2}{3}\frac{h\lambda^4}{\frac{2}{3}\varepsilon_1\lambda^2+\frac{8}{h^2}\varepsilon_2}\right), \tag{1.10}$$

$$\alpha_2=\frac{3C_{22}\lambda^2}{phR},\alpha_3=\frac{3C_{22}\lambda^4}{4ph},$$

нелинейная частота определяется как

$$\Omega=\omega+\chi a^2,\ \chi=\frac{3}{8}\frac{\alpha_3}{\omega}-\frac{5}{12}\frac{\alpha_2^2}{\omega^3}. \tag{1.11}$$

Как видно из (1.10) и (1.11), коэффициент нелинейности в зависимости от физических и геометрических величин может быть и положительным, и отрицательным. Для первого случая необходимо условие

$$40\frac{C_{22}}{R^2 D}<1. \tag{1.12}$$

В этом случае имеется так называемый жесткий материал, а во втором – мягкий.

В качестве второго материала возьмем пьезоэлектрик $6m2$ [4]. Если координатные оси перевернуть на 90°, то необходимые нам величины имеют вид

$$\sigma_y=b_{22}e_y-e_1E_2\ ,\ D_2=e_1e_y-\varepsilon_1E_2\ ,\ D_3=\varepsilon_2E_3. \tag{1.13}$$

Здесь уже пьезоэффект входит в выражение кольцевого усилия

$$T_2=C_{22}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}e_1h\frac{\partial F}{\partial y}, \tag{1.14}$$

и уравнение относительно F запишем как

$$e_1\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}3\right)^2\right]-\frac{2}{3}\varepsilon_1\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{8}{h^2}\varepsilon_2 F=0\,. \tag{1.15}$$

На кромках первые условия (1.8) такие же, однако вместо последнего члена должно быть $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, и выражение кольцевого усилия примет вид

$$T_2=\left(\frac{2f}{\pi R}+\frac{1}{4}f^2\lambda^2\right)C\,,\ C=C_{22}+\frac{he_1^2}{b\left(\frac{1}{3}\varepsilon_1+\frac{4}{h^2}\varepsilon_2\frac{1}{\lambda^2}\right)}\,. \tag{1.16}$$

Нелинейное уравнение относительно f имеет такой же вид, как (1.10), но уже с новыми

$$\omega^2=\frac{1}{\rho h}\left(D_{22}\lambda^4+\frac{8C}{\pi^2R^2}\right),$$

$$\alpha_2=\frac{3}{\rho h}\frac{\lambda^2}{\pi R}C,\ \alpha_3=\frac{1}{4\rho h}\lambda^4 C. \tag{1.17}$$

Здесь выражение нелинейной частоты при (1.11) будет иметь новые параметры, и условие, аналогичное (1.12), есть

$$40\frac{C}{\pi^2R^2\left(D_{22}\lambda^4+\frac{B}{\pi^2R^2}C\right)}<1\,. \tag{1.18}$$

2. Уравнение вынужденных колебаний рассмотрим для первого пьезоэлектрика.

Если предположить, что на панели действует нормальное давление $q_0\sin\lambda y\cos\theta t$, то уравнением вынужденных колебаний будет

$$\frac{d^2f}{dt^2}+2\beta\frac{df}{dt}+\omega^2 f+\alpha_2 f^2+\alpha_3 f^3=\frac{q_0}{\rho h}\cos\theta t\,. \tag{2.1}$$

Обычно при исследовании вынужденных колебаний добавляется член, учитывающий внутреннее трение. В (2.1) таковым является $2\beta\frac{df}{dt}$. Изучение (2.1) проводится согласно [2]. В предположении, что $\theta=\omega+\varepsilon$, частное решение ищется как

$$f=a\cos(\theta t+\varepsilon)\,, \tag{2.2}$$

тогда для амплитуды колебаний получим

$$a^2\left[\left(\varepsilon-\chi a^2\right)^2+\beta^2\right]=\frac{\bar{q}^2}{4\omega^2}.\ \bar{q}=\frac{q_0}{\rho h}. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) – кубическое относительно a^2, и в зависимости от ε при заданной амплитуде q_0 характеры кривых различны. При малых q_0 амплитуда a также мала и однозначна, но уже при

$$\bar{q}^2=\frac{8\omega^2\beta^2}{|\chi|} \tag{2.4}$$

(2.3) имеет три вещественных корня. Характер кривой $a=a(\varepsilon)$ общеизвестен [2]. Заметим также, что максимальная амплитуда определяется как

$$a_{\max}=\frac{\overline{q}}{2\omega\beta}. \tag{2.5}$$

Вышеприведенный резонанс по известным причинам называется главным, но, как известно, нелинейность колебаний приводит к появлению ряда резонансов. В этом отношении интересен резонанс параметрического типа, т.е. если

$$\theta=\frac{\omega}{2}+\varepsilon, \tag{2.6}$$

то решение (2.1) ищется в виде [2]

$$f=a\cos\left[\left(\omega+\frac{\varepsilon}{2}\right)t+\delta\right] \tag{2.7}$$

и для амплитуды вынужденных колебаний возможны следующие значения:

$$a=0,\ a^2=\frac{1}{\chi}\left[\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha_2\overline{q}}{6\omega^3}\right)^2-\beta^2}\right]. \tag{2.8}$$

Характер кривой $a=a(\varepsilon)$ здесь другой ([2], с.117, рис.33). Заметим, что в зоне, где возможны три амплитуды колебаний, значению $a=0$ соответствует неустойчивая ветвь.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

К нелинейным колебаниям цилиндрической панели из пьезоэлектрика

Рассматриваются одномерные нелинейные свободные и вынужденные колебания цилиндрической панели из пьезоэлектриков. Определены нелинейные частоты и амплитуды колебаний.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Պիեզոէլեկտրիկից գլանային պանելի ոչ գծային տատանումների մասին

Դիտարկվում են երկու տեսակի պիեզոէլեկտրիկներից գլանային պանելի միաչափ երկրաչափորեն ոչ գծային ազատ և հարկադրական տատանումների խնդիրները: Ստացված են արտահայտություններ հաճախությունների և ամպլիտուդների համար:

L. A. Movsisyan

About Nonliniear Vibrations of Piezoelectric Cylindrical Panel

The free and forced vibrations for cylindrical panel are considered. The expressions for frequencies and amplitudes are obtained.

Литература

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука. 1972. 432 с.
2. *Ландау Л. А., Лифшиц Е.М.* Механика. М. Наука. 1965. 203 с.
3. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М. Мир. 1984. 535 с.
4. *Дьелесен Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М. Наука. 1982. 424 с.
5. *Мовсисян Л. А.* –ДНАН РА. 1997. Т. 97. №3. С. 3-7.