ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 4

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

С. М. Варданян

# О любых возможных структурах минимальных $n$-распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств относительно операций пересечения и дополнения

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 21/II 2013)

**Ключевые слова:** *распознающие системы, пересечение и дополнение множеств, минимальные системы.*

В статье рассматриваются распознающие системы, аналогичные рассмотренным в [1-3]. Они отличаются от распознающих систем, рассмотренных в [4-6], тем, что в роли операций, применяемых к множествам данной системы, фигурирует не только операция пересечения множеств, но и операция дополнения множества до данного универсального множества.

Приведем основные определения понятий, используемых ниже; остальные понятия можно найти в [7].

Рассмотрим конечное множество $[n]=\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, $n\geq 3$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть $\mathrm{n}^*=\{\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,...,\mathrm{A}_\mathrm{k}\}$ является подмножеством множества $R[n]$.

**Определение 1.** *Будем говорить, что система $n^*$ распознает элемент $i\in[n]$, если с помощью операций пересечения и дополнения (по отношению к $[n]$) из множеств $A_1, A_2, ..., A_k$ можно получить $\{i\}$.*

**Определение 2.** *Будем говорить, что $n^*$ является $n$-распознающей системой, если система $n^*$ распознает каждый элемент $i\in[n]$.*

Посредством $|A|$, где $A$ – какое-либо множество, будем обозначать мощность множества $A$. Так как $R[n]$ является $n$-распознающей системой, то класс $n$-распознающих систем заведомо не является пустым. Определим обычные понятия минимальности и тупиковости для $n$-распознающих систем.

**Определение 3.** *$n$-распознающая система $n^*$ называется тупиковой, если любое собственное подмножество множества $n^*$ не является $n$-распознающей системой.*

**Определение 4.** *$n$-распознающая система $n^*$ называется минимальной, если не существует $n$-распознающей системы с мощностью, меньшей, чем $\left|n^*\right|$.*

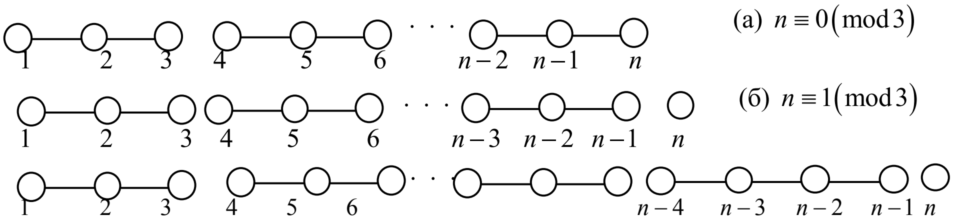
**Определение 5.** *Дерево, имеющее k вершин, называется звездой (или k-звездой), если в этом дереве существует вершина, смежная со всеми остальными $(k-1)$ вершинами данного дерева: k-звезду будем обозначать через $z_k$.*

В этой статье рассматриваются такие распознающие системы, элементы которых являются двухэлементными подмножествами множества $[n]$. Каждой такой распознающей системе сопоставим граф следующим образом. Каждому элементу множества $[n]$ сопоставим вершину указанного графа, при этом различным элементам сопоставим различные вершины. Две различные вершины соединим ребром в том и только в том случае, когда соответствующие элементы принадлежат одному и тому же множеству данной системы. Граф, построенный указанным образом, будем называть представляющим графом данной $n$-распознающей системы. Ясно, что представляющий граф $n$-распознающей системы определяет ее однозначно (с точностью до изоморфизма; изоморфизм $n$-распознающих систем определяется естественным образом). Мы иногда будем отождествлять $n$-распознающую систему с представляющим ее графом, говоря о ее свойствах как о свойствах представляющего ее графа. Длиной цепи $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ (а также ее мощностью) будем называть количество ребер в ней, т.е. число $(k-1)$. Изолированные вершины графа будем называть цепями длины нуль. Через $\left|T_2^n\right|$ будем обозначать мощность минимальной $n$-распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств.

В [2] доказано, что

$$\left|T_2^n\right| = \begin{cases} \frac{2}{3}n, & \text{åñëè } n \equiv 0 (\operatorname{mod} 3), \\ \frac{2}{3}(n-1), & \text{åñëè } n \equiv 1 (\operatorname{mod} 3), \\ \frac{2}{3}(n-2)+1, & \text{åñëè } n \equiv 2 (\operatorname{mod} 3). \end{cases}$$

В [1] приведены примеры (по одному для каждого случая) тупиковых распознающих систем (рис. 1), которые, согласно результатам, доказанным в [2], являются минимальными.




(в) $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$

Рис. 1.

Ниже приведем формулировки утверждений, доказанных в [2] и используемых в дальнейшем изложении.

**Лемма 1.** *Если* $n^* = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ *является* $n$*-распознающей системой, то объединение всех* $A_i$ *может не содержать самое большее один элемент множества* $[n]$.

**Лемма 2.** *Для всякой* $n$*-распознающей системы* S*, представляющий граф которой содержит циклы, можно построить* $n$*-распознающую систему* $S^*, S^* \subset S,$, $|S^*| \subset |S|$, *представляющий граф которой не содержит циклов.*

**Следствие 1.** *Для всякой* $n$*-распознающей системы* $S$*, представляющий граф которой содержит циклы, можно построить* $n$*-распознающую систему* $S^*, S^* \subset S,$, $|S^*| \subset |S|$, *представляющий граф которой является лесом.*

**Лемма 3.** *Любая* $n$*-распознающая система не может содержать множества, которое не пересекается ни с одним другим множеством данной системы.*

**Лемма 4.** *Для всякой* $n$*-распознающей системы* $S$*, представляющий граф которой является лесом, существует* $n$*-распознающая система* $\mathrm{S}^*$, $|S^*| = |S|$, *представляющий граф которой является лесом, причем каждая компонента связности этого леса представляет собой цепь.*

**Лемма 5.** *Для всякой* $n$*-распознающей системы* $S$*, представляющий граф которой содержит цепь длиною* $\geq 5$*, можно построить* $n$*-распознающую систему* $S^*$, $S^* \subset S$, $|S^*| < |S|$, *представляющий граф которой содержит только такие цепи, число ребер в которых* $\leq 4$.

Из лемм 1 – 5 вытекает следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Для всякой* $n$*-распознающей системы* $S$ *существует* $n$*-распознающая система* $\mathrm{S}^*$ *такая, что* $|S^*| \leq |S|$ *и представляющий граф для* $S^*$ *есть лес, все связные компоненты которого суть цепи, состоящие из 0, 2, 3 или 4 ребер.*

**Теорема 1.** *При* $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ *граф, показанный на рис 1(а), является представляющим графом для единственной минимальной распознающей системы без изолированных вершин (с точностью до изоморфизма).*

**Доказательство.** Так как в [2] уже доказано, что число ребер в минимальной распознающей системе равно $2n/3$, то, следовательно, граф, показанный на рис. 1,а, является минимальным. Но удаление любого ребра приводит к цепи длиною 1 (одно ребро), что противоречит тому, что система распознающая (лемма 3). Если предположить, что в минимальной распознающей системе без изолированных вершин может существовать отличная от $Z_3$ компонента связности, то легко убедиться в том, что в этой же компоненте можно удалить ребро, инцидентное висячей вершине, и полученная система будет распознающей. Но полученная система содержит на одно ребро меньше, чем первоначальная, что противоречит минимальности рассматриваемой системы. Следовательно, указанный граф является представляющим графом для единственной минимальной распознающей системы при $n \equiv 0(\bmod 3)$ без изолированных вершин.

**Теорема 2.** *При* $n \equiv 0(\bmod 3)$ *и* $n \geq 9$ *существуют 6 попарно не изоморфных друг другу минимальных распознающих систем с изолированной вершиной.*

**Доказательство.** По лемме 1 число изолированных вершин в распознающей системе будет не больше одного. Предположим, что $n \equiv 0(\bmod 3)$, и дадим способ построения минимальных распознающих систем (т.е. их представляющих графов), содержащих одну изолированную вершину. Будем рассматривать способ построения минимальных распознающих систем, заключающийся в преобразовании минимальной системы, состоящей из $n/3$ цепей вида $Z_3$ (см. рис. 1, а). Это преобразование определяется следующим образом. Фиксируем число $t$ такое, что $0 < t \leq n/3$, и рассматриваем подсистему $\Gamma_t$ основной системы, состоящую из $t$ цепей вида $Z_3$ (не исключается случай $t = n/3$, когда $\Gamma_t$ совпадает со всей основной системой). Подсистема $\Gamma_t$ содержит, очевидно, $3t$ вершин и $2t$ ребер. Теперь заменим систему $\Gamma_t$ новой системой, состоящей, во-первых, из одной изолированной вершины, во-вторых, из набора деревьев $\Omega$, содержащего $3t-1$ вершин (оставшиеся $n/3-t$ цепей основной системы остаются неизменными). Нас будут интересовать преобразования указанного вида, приводящие к минимальной системе. Количество деревьев в наборе $\Omega$ обозначим через $j$. Поскольку количество ребер в каждом дереве на единицу меньше числа вершин в нем, следовательно, количество ребер в $\Omega$ равно $3t-1-j$. Сравним теперь количество ребер в подсистеме до и после преобразования. Оно не может уменьшиться в результате преобразования, иначе основная система не была бы минимальной. Если же оно увеличивается, т.е. $3t-1-j > 2t$, то полученная система не является минимальной, а такие случаи нас интересовать не будут. Таким образом, в интересующих нас случаях имеет место равенство $3t-1-j = 2t$, откуда $j = t-1$.

Легко видеть, что при $n \equiv 0(\bmod 3)$ и $n \geq 9$ любая минимальная $n$-распознающая система, содержащая изолированную вершину, может быть представлена в виде результата описанного здесь преобразования. Рассмотрим теперь вопрос о возможной структуре набора деревьев $\Omega$. В соответствии с леммой 3 количество ребер в деревьях из $\Omega$ будет не меньше 2. Пусть число деревьев с двумя ребрами в наборе $\Omega$ будет $x_2$, число деревьев с 3 ребрами обозначим через $x_3$, с 4 ребрами – через $x_4$ и т. д. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_k = t - 1 (I) \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \ldots + kx_k = 2t (II) \end{cases}$$

где $k$ – наибольшее количество ребер в деревьях из $\Omega$.

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + \ldots + (k-1)x_k = t + 1.$$

Если еще раз вычесть первое уравнение из полученного, получим новое уравнение $x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + \ldots + (k-2)x_k = 2$.

Учитывая, что мы ищем решение заданной системы в множестве неотрицательных целых чисел, для последнего полученного уравнения возможные решения будут следующими: переменные $x_5, x_6$ и т.д. будут принимать только значение нуль; что касается переменных $x_3$ и $x_4$, то возможны следующие два случая:

(I) $x_3 = 2$ и $x_4 = 0$ или (II) $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$.

Очевидно, что полученное уравнение других решений не имеет. Что касается переменной $x_2$, то, как легко видеть, ее значение равно количеству компонент вида $Z_3$ в графе $\Omega$, полученному в результате рассматриваемого выше преобразования. Из первоначального уравнения

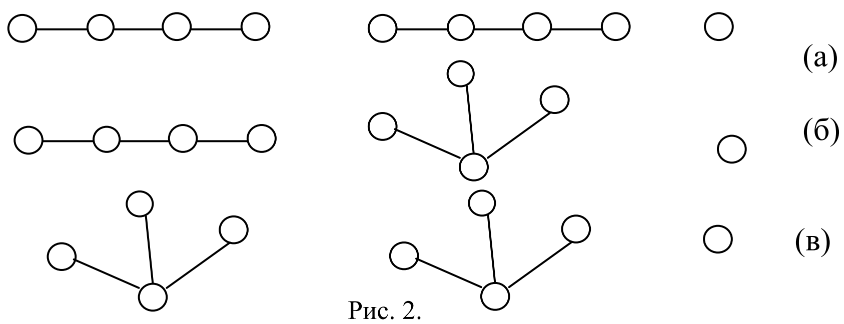



Рис. 2.

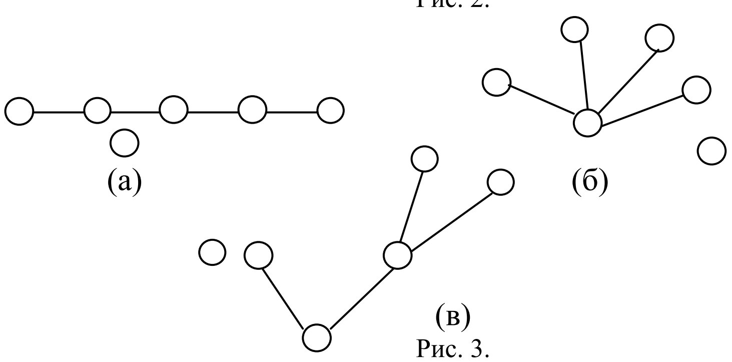



Рис. 3.

(I), принимая во внимание соотношение $j = t - 1$, где $j$ есть количество связных компонент в графе $\Omega$, а также равенство $x_5 = x_6 = \ldots = x_k = 0$, получаем, что в случае (I) имеет место соотношение $x_2 = j - 2$, а в случае (II) соотношение $x_2 = j - 1$ Таким образом, в случае (I) все связные компоненты графа $\Omega$, кроме двух, совпадают с $Z_3$ а в случае (II) с $Z_3$ будут совпадать все связные компоненты графа $\Omega$, кроме одной. Остальные связные компонентв графа $\Omega$ вместе с изолированной вершиной, как легко проверить, будут иметь вид, показанный на рис. 2 и 3, где графы на рис. 2, а-в получаются в случае (I), а графы на рис. 3, а-в – в случае (II). Теорема 2 доказана.

**Замечание.** При $n = 6$ возможен только случай (II), и число минимальных не изоморфных друг другу представляющих графов с изолированными вершинами будет 3 (см. рис. 3), а при $\geq 9$ их число будет равно 6.

**Следствие 1.** *При $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ существует 7 попарно неизоморфных минимальных распознающих систем (или столько же соответствующих представляющих графов).*

**Теорема 3.** *При $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ существует единственная минимальная распознающая система (рис. 1,б) с точностью до изоморфизма; она содержит единственную изолированную вершину.*

Действительно, мы производим преобразование основной минимальной системы (рис. 1,б), аналогичное преобразованию, проведенному в доказательстве теоремы 2, а именно, $t$ цепей типа $Z_3$ заменяются какими-то деревьями, и полученный представляющий граф является минимальным. Выбранные $t$ цепей типа $Z_3$ вместе содержат $3t$ вершин и $2t$ ребер. Так как $\left|T_2^n\right| = 2(n-1)/3$ при $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, то любая замена $t$ блоков $Z_3$ другими деревьями (которые являются связными компонентами леса с 4 или более вершинами) вместе не могут содержать $< 2t$ ребер. Иначе получим, что мощность новой распознающей системы $< 2(n+1)/3$, что противоречит минимальности первоначальной распознающей системы. С другой стороны, при вышеуказанной замене число ребер не может быть $> 2t$, иначе такая распознающая система не будет минимальной. Следовательно, рассматриваемый лес, в котором заменены $t$ цепей типа $Z_3$ из начальной минимальной распознающей системы, должен содержать точно $2t$ ребер. Выделенные $t$ цепей, содержащие вместе $3t$ вершин, при указанном преобразовании будут заменены набором деревьев; количество деревьев в нем обозначим через $j$. Число ребер в преобразованной системе равно $3t - j$. Если $3t - j > 2t$, т. е. $j < 3t - 2t = t$ сделанная замена не приводит к минимальной распознающей системе. Таким образом, число ребер будет $3t - t = 2t$ Откуда $j = t$, Последний факт означает, что $t$ цепей типа $Z_3$ из начальной распознающей системы заменены $t$ деревьями с числом ребер $2t$ А это в свою очередь означает, что каждое новое дерево должно совпасть с $Z_3$ (так как по лемме 3 компонента связности не может содержать 1 ребро). Следовательно, при $n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ минимальная распознающая система единственна (с точностью до изоморфизма) и содержит одну изолированную вершину.

**Теорема 4.** *В случае $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ любая распознающая система не может содержать только компоненты $Z_3$ и не может содержать только изолированную вершину и деревья типа $Z_3$.*

Теорема очевидна, иначе число вершин в графе будет или $3t$ или $3t+1$, но тогда $3t \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ или $3t+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, что противоречит условию теоремы 4.

**Следствие.** *При $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ любая тупиковая распознающая система обязательно содержит изолированную вершину.*

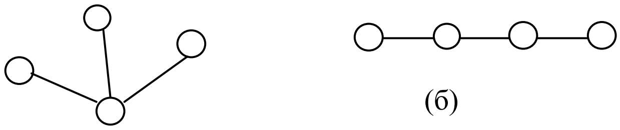
В самом деле, допустим, что существует тупиковая система без изолированной вершины. По теореме 4 такая система содержит компоненту с числом вершин 4 или больше. Но тогда одно краевое ребро (ребро, инцидентное висячей вершине) можно удалить, и полученная система будет распознающей. А это противоречит тупиковости рассматриваемой распознающей системы.

Следовательно, любая тупиковая, в том числе и минимально распознающая, система содержит одну изолированную вершину.

В [1,2] доказано, что граф, показанный на рис. 1,в является представляющим графом минимальной распознающей системы при $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$.

**Теорема 5.** *При $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$ существуют только две попарно не изоморфные минимальные распознающие системы.*

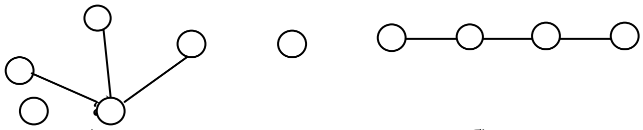
Аналогично доказательству теорем 2 и 3 устанавливается, что любые $t$ блоков типа $Z_3$ нельзя заменить чем-нибудь другим (не совпадающим с первоначальным с точностью до изоморфизма) и получить новую минимальную распознающую систему. В самом деле, допустим что $t$ блоков типа $Z_3$ и дерево на 4-х вершинах (см. рис. 1,в) можно заменить другим лесом, чтобы полученная система была минимальной. Заметим, что $t$ блоков типа $Z_3$ содержат $3t$ вершин и $2t$ ребер, а последнее дерево содержит 4 вершины и 3 ребра. В результате мы получим, что выделены $3t+4$ вершины и $2t+3$ ребра. Пусть указанные вершины заменятся лесом, содержащим $j$ компонент связности. Тогда число ребер в преобразованной системе будет равно $3t+4-j$. И если $3t+4-j > 2t+3$, сделанная замена не даст минимальной распознающей системы. А если $3t+4-j > 2t+3$ или, иначе говоря, $j = t+1$ то получим минимальную распознающую систему. При $j = t+1$ число компонент будет $t+1$, как и вначале, и число ребер, соответственно, будет равно $2t+3$. Так как в этом комплексе изолированных вершин нет, единственным возможным вариантом будет: $t$ цепей типа $Z_3$ и некоторое дерево на 4-х вершинах. А таких деревьев, не изоморфных друг другу, на 4-х вершинах всего лишь два – или $Z_4$ (рис. 4,а), или цепь длиною 3 (рис. 4,б).



(а) (б)

Рис. 4.

Таким образом, при $n \equiv 2 (\bmod 3)$ могут быть только две (рис. 5,а,б) минимальные распознающие системы, в которых имеется $x$ цепей вида $Z_3$ (причем $x \geq 0$) и, кроме того, имеются компоненты, представляющие графы которых изображены на рис 5,а,б.



а) б)

Рис. 5.

Теорема доказана.

Институт проблем информатики
и автоматизации НАН РА
e-mail: seyranv@ipia.sci.am

**С. М. Варданян**

**О любых возможных структурах минимальных *n*-распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств относительно операций пересечения и дополнения**

Рассмотрены все возможные конструкции минимальных распознающих систем указанного типа.

**Ս. Մ. Վարդանյան**

**Երկտարր բազմությունների դասում *n*-ճանաչող մինիմալ համակարգերի բոլոր հնարավոր կառուցվածքների մասին**

Դիտարկվում են նշված տիպի մինիմալ *n*-ճանաչող համակարգերի բոլոր հնարավոր կառուցվածքները։

**S. M. Vardanyan**

## On All Possible Structures of Minimal $n$-Recognizing Systems in the Class of Two-Element Subsets Concerning the Operations of Intersection and Complement

All possible structures of the minimal systems of the denoted kind are considered.

### Литература

1. *Vardanyan S. M.* – Mathematical Problems of Computer Sciences. 2011. V. 35. P. 104-108.
2. *Варданян С. М.* – ДНАН РА. 2012. Т. 112. N 1. С. 57-65.
3. *Эрдеш П., Спенсер Дж.* Вероятностные методы в комбинаторике. М. Мир. 1976.
4. *Варданян С. М.* – ДАН АрмССР. 1981. Т. 72. N 3. С. 141-143,
5. *Варданян С. М.* – ДНАН РА. 2007. Т. 107. N 1. С. 37-43.
6. *Vardanyan S. M.* In: Computer Science and Information Technologies. Proceedings of the conference CSIT05. Yerevan. 2005. P. 161-162.
7. *Harary F.* Graph Theory. Addison – Wesley. Reading MA. 1969.