ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 113 2013 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517

И. В. Оганисян

Об одном представлении классов $N_\alpha(-1<\alpha<0)$

(Представлено академиком В. С. Захаряном 28/VI 2013)

Ключевые слова: *классы М. М. Джрбашяна, произведение Бляшке, коэффициенты Тейлора.*

Классы мероморфных в единичном круге функций $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ М. М. Джрбашяна совпадают с множеством функций $F(z)$, которые допускают представление вида [1,2]

$$F(z)=c\cdot z^{\lambda}\frac{B_\alpha(z;a_\mu)}{B_\alpha(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\Psi(\theta)\right\}, \tag{1}$$

где c – постоянная, λ – целое число, функция $S_\alpha(z)$ имеет вид

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\},$$

а $\Psi(\theta)$ – произвольная вещественная функция ограниченной вариации на сегменте $[0,2\pi]$.

Функции $B_\alpha(z;a_\mu)$ и $B_\alpha(z;b_\nu)$ – сходящиеся в круге $|z|<1$ бесконечные произведения с нулями $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ соответственно, которые при $\alpha=0$ совпадают с произведением Бляшке

$$B(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\cdot\frac{|z_k|}{z_k}. \tag{2}$$

Множество нулей произведения Бляшке должно удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty.$$

Классы $N_\alpha(-1<\alpha<\infty)$ с убыванием α монотонно сужаются и, в частности,

$$N_\alpha \subset N_0\ , -1 < \alpha < 0,$$

$$N_0 \subset N_\alpha, 0 < \alpha < \infty,$$

где $N_0 \equiv N$ – класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны.

Для функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$ известны $[2]$ представление и теорема о принадлежности функции B классу $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ $[3]$.

Теорема A. *Пусть* $F(z)\subset N_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$. *Тогда существуют ограниченные аналитические функции*

$$f_i(z)=\sum a_n^{(i)} z^n \in N_\alpha, \quad i=1,2,...,$$

такие, что

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} z^n}, \tag{3}$$

причем

$$\left|a_n^{(i)}\right| = \mathrm{O}\left(n^\alpha\right), \quad n\to\infty;\ i=1,2,...\ .$$

Теорема B. *При* $\alpha\in(-1;0)$ *условия* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<\infty$ *и* $B(z;z_k)\in N_\alpha$ *эквивалентны.*

Приведем некоторые известные результаты, относящиеся к связям между распределением нулей произведений Бляшке и поведением их коэффициентов Тейлора $\dfrac{B^{(n)}(0)}{n!}$.

Во-первых, исходя из того, что бесконечное произведение Бляшке почти всюду имеет радиальное предельное значение, равное по модулю единице, легко обнаружить, что порядок коэффициентов Тейлора таких функций не может быть равным $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon>0$.

Более того, Ньюман и Шапиро показали [4], что коэффициенты Тейлора внутренней функции (т. е. таких функций, которые аналитичны в единичном круге, ограничены по модулю единицей и имеют почти всюду граничные предельные значения, равные по модулю единице) имеют порядок $o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ лишь в тривиальном случае конечных произведений Бляшке.

Для тех $B(z;z_k)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, нули которых удовлетворяют условию Ньюмана

$$\underset{k\geq 1}{Sup}\frac{1-|z_{k+1}|}{1-|z_k|}<1,\ \ \left(|z_k|\ \uparrow\ 1\right), \tag{N}$$

получена [4] следующая оценка:

$$|a_n| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n\to\infty .$$

Далее, Вербицкий [5] доказал более общее утверждение, что эта оценка для произведений Бляшке выполнена тогда и только тогда, когда последовательность нулей состоит из конечного объединения (N) последовательностей.

Известно также ([6], с. 29), что, если множество нулей удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}<\infty$ при $\alpha\in(-1;0)$, то для коэффициентов Тейлора произведения Бляшке справедлива оценка

$$|a_n| = \mathrm{O}\left(n^{\alpha}\right),\ \ n\to\infty .$$

В данной работе получена та же самая оценка, что и выше, для коэффициентов тейлоровских разложений произведений Бляшке при условии

$$1-|z_k| = \mathrm{O}\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right),\qquad \alpha\in(-1,0).$$

Из полученной оценки следует, что для функций класса $N_\alpha\,(-1<\alpha<0)$ представление (3) является только необходимым условием.

Теорема. *Если множество нулей* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, *при* $-1<\alpha<0$ *удовлетворяет условию*

$$1-|z_k| = \mathrm{O}\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right),\qquad \left(|z_k|\uparrow 1\right), \tag{4}$$

то для произведений Бляшке

$$B(z;z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ \ |z|<1 \tag{5}$$

справедлива оценка

$$|a_n| = \mathrm{O}\left(n^{\alpha}\right),\ \ n\to\infty .$$

Доказательство. Из (2) имеем

$$B'(z;z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|z_k|^2-1}{\left(1-\bar{z}_k z\right)^2}\cdot\frac{|z_k|}{z_k}\cdot\prod_{p\neq k}\frac{z_p-z}{1-\bar{z}_p z}\cdot\frac{|z_p|}{z_p}\right).$$

Откуда, имея в виду неравенство

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right|\leq 1,\qquad |z|<1,\quad |\zeta|<1,$$

немедленно следует

$$\left|B'\left(re^{i\varphi};z_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|1-\bar{z}_k re^{i\varphi}\right|^2} \quad .$$

Интегрируя последнее неравенство и применяя оценку ([2], ст. 154)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left|1-re^{i\varphi}\right|^{\beta}} \le \frac{c}{(1-r)^{\beta-1}}, \ \beta > 1,$$

получим

$$\int_0^{2\pi} \left|B'\left(re^{i\varphi};z_k\right)\right| d\varphi \le c\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\left|z_k\right|}{1-\left|z_k\right|r} = c\left(\sum_{\left|z_k\right|\ge r} + \sum_{\left|z_k\right|<r}\right) \le$$

$$\le c\left(\sum_{\left|z_k\right|\ge r} \frac{1-\left|z_k\right|}{1-r} + \sum_{\left|z_k\right|<r} \frac{1-\left|z_k\right|}{1-\left|z_k\right|}\right) = c\left(\frac{1}{1-r}\sum_{\left|z_k\right|\ge r}\left(1-\left|z_k\right|\right) + \sum_{\left|z_k\right|<r} 1\right).$$

Обозначим через $\nu(t) = card\left\{k : \left|z_k\right| < 1-t\right\}$.

Сначала покажем, что из условия (4) вытекает неравенство

$$\nu(t) \le c\cdot t^{-\alpha-1} \equiv c\cdot\frac{1}{t^{1+\alpha}}.$$

Поскольку

$$\nu(t) = card\left\{k : 1-\left|z_k\right| > t\right\},$$

то учитывая неравенство

$$1-\left|z_k\right| \le c_1\cdot k^{-\frac{1}{1+\alpha}},$$

будем иметь

$$\nu(t) \le card\left\{k : c_1\cdot k^{-\frac{1}{1+\alpha}} > t\right\} = card\left\{k : k < c\cdot t^{-(1+\alpha)}\right\} \le c\cdot t^{-(1+\alpha)}$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \left|B'\left(re^{i\varphi};z_k\right)\right| d\varphi \le$$

$$c\left(\frac{1}{1-r}\left|\int_0^{1-r} t\,d\nu(t)\right| + \nu(1-r)\right) \le$$

$$c\left(\frac{1}{1-r}\left(t\nu(t)\Big|_0^{1-r} + \int_0^{1-r}\nu(t)\,dt\right) + \nu(1-r)\right) \le$$

$$c\left(\frac{1}{1-r}\left((1-r)\nu(1-r) + c\int_0^{1-r} t^{-(1+\alpha)}dt\right) + \nu(1-r)\right) =$$

$$c\left(\nu(1-r) + \frac{ct^{-\alpha}}{1-r}\Big|_0^{1-r} + \nu(1-r)\right) \le \frac{c}{(1-r)^{1+\alpha}} \ .$$

Однако, с другой стороны, из (5) с ледует, что

$$na_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} B'(z; z_k) \cdot z^{-n} dz .$$

Поэтому

$$|a_n| \le \frac{r^{1-n}}{n} \int\limits_0^{2\pi} \left| B'\left(re^{i\varphi}; z_k\right) \right| d\varphi \le c \frac{r^{1-n}}{n(1-r)^{1+\alpha}},$$

откуда, минимизируя функцию

$$\frac{r^{1-n}}{n(1-r)^{1+\alpha}},$$

при $0 < r < 1$ получаем

$$|a_n| \le c \frac{\left(\frac{n-1}{n+\alpha}\right)^{1-n}}{n\left(1-\frac{n-1}{n+\alpha}\right)^{1+\alpha}} \le c \frac{(n+\alpha)^{1+\alpha}}{n} \le cn^{\alpha}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Представление (3) для функций класса* $N_\alpha(-1 < \alpha < 0)$ *является только необходимым условием.*

Доказательство. Выберем $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, при $-1 < \alpha < 0$ удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)-\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)$ сходится, но $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} = \infty$. Значит соответствующее произведение Бляшке по теореме В не принадлежит классу $N_\alpha(-1 < \alpha < 0)$. Однако, согласно доказанной теореме, оно будет иметь представление вида (3).

Государственный инженерный университет Армении

И. В. Оганисян

Об одном представлении классов $N_\alpha(-1 < \alpha < 0)$

Доказывается, что если множество нулей удовлетворяет условию $1-|z_k| = \mathrm{O}\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right)$, $|z_k|\uparrow 1$, $-1 < \alpha < 0$, то коэффициенты Тейлора соответствующего произведения Бляшке имеют порядок $\mathrm{O}\left(n^{\alpha}\right)$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что известное представление для подкласса мероморфных в единичном круге функций ограниченного вида $N_\alpha(-1 < \alpha < 0)$ является только необходимым условием.

Ի. Վ. Հովհաննիսյան

$N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ դասերի մի ներկայացման մասին

Ապացուցվում է, որ եթե Բլյաշկեի արտադրյալի զրոների բազմությունը բավարարում է $1-\left|z_k\right|=\mathrm{O}\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right)$, $\left|z_k\right|\uparrow 1$, $-1<\alpha<0$ պայմանին, ապա նրա Թեյլորի գործակիցներն ունեն $\mathrm{O}\left(n^{\alpha}\right)$, $n\to\infty$ կարգը: Որտեղից ստացվում է, որ սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների բազմության $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ ենթադասերի համար հայտնի ներկայացումը միայն անհրաժեշտ է:

I. V. Hovhannisyan

On a Representation of Classes $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$

It is proved that if the set of zeros satisfy the condition $1-\left|z_k\right|=\mathrm{O}\left(k^{-\frac{1}{1+\alpha}}\right)$, $\left|z_k\right|\uparrow 1$, $-1<\alpha<0$, then the Taylor coefficients of Blaschke product are of type $\mathrm{O}\left(n^{\alpha}\right)$, $n\to\infty$. This result shows that the known representation of subclasses of meromorphic functions of bounded type on unit circle $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ is only necessary condition.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966. 672 с.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Наука. 1993. 224 с.
3. *Джрбашян М. М.* – ДАН СССР. 1967.Т. 175. N 5. С. 981-984.
4. *Newman D. J., Shapiro H. S.* – Mich. Math. J. 1962.V. 9. P. 249-255.
5. *Вербицкий Н.Э.* – Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 107. С. 27-35.
6. *Оганисян И. В.* Некоторые свойства функций классов $N_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$. Канд. дис. Ереван. 1990. 71 с.