ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր
Том 113 2013 № 1
Volume

МАТЕМАТИКА

УДК 517

MSC 2000 Number 30D35

Академик В. С. Захарян, А. М. Джрбашян, Р. В. Даллакян

Об ω - характеристиках аналитических в единичном круге функций

(Представлено 11/X 2012)

Ключевые слова: *обобщенный оператор Римана – Лиувилля, произведение типа Бляшке, ядра М. М. Джрбашяна.*

1. Введение. М. М. Джрбашяном с применением некоторого функционального обобщения оператора дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля построена теория факторизации классов $N\{\omega\}$ неванлинновского типа, охватывающая все функции, мероморфные в единичном круге $|z|<1$ комплексной плоскости [1]. Классы $N\{\omega\}$ зависят от функционального параметра $\omega(x)$, заданного в $[0,1)$, которые в зависимости от монотонного возрастания или убывания функции $\omega(x)$ вложены или содержат неванлинновский класс N. При этом классы $N\{\omega\}$, содержащиеся в N, обладают тонкими граничными свойствами. Эта теория М. М. Джрбашяном и В. С. Захаряном [2] дана в объединенной форме с дополнениями [2-4]. По аналогии с классом N мероморфных в $|z|<1$ функций с ограниченной неванлинновской характеристикой $T(\rho;F)$ классы $N\{\omega\}$, определенные ограниченностью характеристики $T_\omega(r,f)$ М. М. Джрбашяна, исследовались многими авторами. В [5], в случае убывающего функционального параметра $\omega(x)$, найдена естественная связь между характеристиками $T(\rho;F)$ и $T_\omega(r,f)$, что связано с затруднениями в случае возрастающего $\omega(x)$.

Данная работа устанавливает теорему о характеристиках $T_\omega(r,f)$ в случае неубывающего функционального параметра $\omega(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega \in \Omega^*$ *– неубывающая функция и пусть* $\{\alpha_i\}$ *– последовательность неубывающих, положительных чисел таких, что* $\alpha_i \to 1$ *при* $i \to \infty$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[C\left(\alpha_i, \omega\right) \right]^{-1} < +\infty ,$$

где $C(z,\omega)$ *– ядро М. М. Джрбашяна [1, 2].*

Тогда существует такая последовательность комплексных чисел $\lambda_i, |\lambda_i| = \alpha_i$, которая для любой аналитической в $|z|<1$ функции $f(z)$ с нулями $\alpha_\mu, \mu = 1,2,\ldots$, удовлетворяющими условию

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{|a_\mu|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty ,$$

не ограничена, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[C\left(\alpha_i ; \omega\right) \right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)} \left\{ \ln \left| f\left(\lambda_i\right) \right| \right\} = +\infty ,$$

где $L^{(\omega)}$ – обобщенный оператор интегродифференцирования и $L_{(+)}^{(\omega)} u(z) = [L^{(\omega)} u(z)]^{+}$.

2. Обозначения, определения и доказательства. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1.1, необходимо ввести ряд обозначений и определений из [2]. Через Ω обозначим класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$;

2) $\omega(0)=1$, $\int_0^1 \omega(x)\, dx < +\infty$.

Функцию $P(\tau)$ отнесем к классу P_ω, если при некотором $\omega(x) \in \Omega$

$$P(0)=1, \; P(\tau) = \tau \int_\tau^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx, \; \tau \in (0,1],$$

и введем в рассмотрение ядро типа Коши – М. М. Джрбашяна

$$C(z,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \; |z|<1$$

где

$$\Delta_0 = 1, \; \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x)^{k-1} dx, \; k = 1,2,3,\ldots$$

Ядро $C(z,\omega)$, как и ядро типа Шварца

$$S(z,\omega) = 2C(z,\omega) - C(0,\omega) = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k} \;, \; |z|<1 ,$$

аналитические в круге $|z|<1$ функции с особенностями в точке $z=1$:

$$\lim_{r \to 1-0} C(z,\omega) = +\infty.$$

Введем в рассмотрение также гармоническое в круге $|z|<1$ ядро типа Пуассона

$$P(\gamma,r,\omega)=\operatorname{Re}S\left(re^{i\gamma},\omega\right)=1+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{\Delta_k}\cos k\gamma, z=re^{i\gamma}.$$

Теперь для любых $\omega(x)\in\Omega$ и $P(\tau)\in P_\omega$ введем в рассмотрение следующее обобщение интегродифференциального оператора Римана–Лиувилля:

$$L^{(\omega)}\{\phi(x)\}=-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\phi(x\tau)\,dP(\tau)\right\},\ x\in(0,1),$$

где функция $\phi(x)$, определенная на $(0,1)$, такова, что левая часть равенства существует почти всюду на $(0,1)$.

Как можно убедиться (см. [1-4]), применение оператора $L^{(\omega)}$ к любой функции $f(z)$, голоморфной в окрестности начала координат, означает умножение коэффициентов степенного ряда $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ на величины Δ_k, т.е. $L^{(\omega)}\left[f(z)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_kz^k$. Применение же обратного оператора – суть деление коэффициентов степенного ряда на Δ_k. Таким образом, оператор $L^{(\omega)}$ является взаимооднозначным отображением в классе голоморфных в $|z|<1$ функций.

Введя в рассмотрение элементарный фактор Бляшке – М. М. Джрбашяна

$$A_\omega(z,\xi)=\left(1-\frac{z}{\xi}\right)\exp\left\{-W_\omega(z,\xi)\right\},\ \left(|z|<1,|\xi|<1\right),$$

где

$$W_\omega(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi^{-k}\int_0^{|\xi|}\omega(x)x^{k-1}dx-\bar{\xi}^k\int_{|\xi|}^{1}\omega(x)x^{k-1}dx\right]\frac{z^k}{\Delta_k},$$

отметим, что при $\omega(x)\equiv1$ (см. [1, 2])

$$A(z,\xi)=A_\omega(z,\xi)=\frac{\xi-z}{1-\bar{\xi}z}\frac{|\xi|}{\xi},\ \left(|z|<1,\ |\xi|\le1\right).$$

Далее, будем предполагать, что последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ из единичного круга пронумерована в порядке неубывания модулей и удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx<+\infty,$$

где $\omega(x)$ – функция класса Ω. Тогда известно (см. [1-3]), что бесконечное произведение

$$B_\omega(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\omega(z;\xi)}$$

абсолютно и равномерно сходится в любом круге $|z| \le r < 1$ и определяет функцию, аналитическую в $|z| < 1$, с нулями $\{z_k\}$.

Обозначим через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω, подчиненных дополнительному условию

$$\left|\omega(x) - 1\right| \le k_\omega(\tau) x\ ,\ \left(0 \le x \le \tau < 1\right),$$

где $k_\omega(\tau) > 0$ – постоянная.

Пусть $F(z) = C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \ldots (C_\lambda \ne 0)$– мероморфная в круге $|z| < 1$ функция, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\upsilon\}$ – соответственно последовательности ее нулей и плюсов, отличных от $z = 0$ и пронумерованных в порядке неубывания модулей, с учетом кратностей. Тогда известно, что для любой функции $\omega(x) \in \Omega^*$ и для любого числа $\rho(0 < \rho < 1)$ справедлива следующая формула (см. [2]):

$$\ln F(z) = i \arg C_\lambda + \lambda k_\omega + \lambda \ln \frac{z}{\rho} + \sum_{0 < |a_\mu| \le \rho} \ln A_\omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{a_\mu}{\rho}\right) -$$

$$- \sum_{0 < |b_\upsilon| \le \rho} \ln A_\omega\left(\frac{z}{\rho}; \frac{b_\upsilon}{\rho}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\theta}; \omega\right) L^{(\omega)}\left\{\ln\left|F\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right\} d\theta \quad \left(|z| < \rho\right), \qquad (1)$$

где $k_\omega = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x} dx$. Введем в рассмотрение функции

$$N_\omega(\rho; 0) \equiv N_\omega\left(\rho; \frac{1}{F}\right) = \sum_{0 < |a_\mu| \le \rho} W_\omega\left(0; \frac{a_\mu}{\rho}\right) + n(0,0)\left(\ln \rho - k_\omega\right) =$$

$$= \int_0^\rho \frac{n(t;0) - n(0;0)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0;0)\left(\ln \rho - k_\omega\right)$$

$$N_\omega(\rho; \infty) \equiv N_\omega(\rho; F) = \sum_{0 < |b_\upsilon| \le \rho} W_\omega\left(0; \frac{b_\upsilon}{\rho}\right) + n(0,\infty)\left(\ln \rho - k_\omega\right) =$$

$$= \int_0^\rho \frac{n(t;\infty) - n(0;\infty)}{t} \omega\left(\frac{t}{\rho}\right) dt + n(0;\infty)\left(\ln \rho - k_\omega\right)$$

$$m_\omega(\rho; 0) \equiv m_\omega\left(\rho; \frac{1}{F}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln \frac{1}{\left|F\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|}\right\} d\theta$$

$$m_\omega(\rho; \infty) \equiv m_\omega(\rho; F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|F\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right\} d\theta\ ,$$

где для каждого $t(0 < t < 1)$ через $n(t;0)$ и $n(t;\infty)$ обозначены соответственно количество нулей и плюсов функции $F(z)$ в круге $|z| \le t$. Теперь для любого $\omega(x) \in \Omega^*$ положим

$$T_\omega(\rho; F) \equiv m_\omega(\rho; F) + N_\omega(\rho; F),\ 0 < p < 1.$$

Легко видеть, что $\left[T_\omega(\rho; F)\right]_{\omega \equiv 1} \equiv T(\rho; F)$, где $T(\rho; F)$– характеристическая функция Неванлинны [5].

Предполагая, что функция $\omega(x)$ – из класса Ω или класса Ω^*, через $N\{\omega\}$ и $N^*\{\omega\}$ соответственно обозначим множества мероморфных в единичном круге $|z|<1$ функций $F(z)$ с ограниченной характеристической функцией $T_\omega(\rho, f)$.

Имеет место следующая лемма, необходимая для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 2.1. *Неубывающую последовательность положительных чисел* $\{\alpha_i\}_1^\infty$ *такую, что*

$$\lim_{i\to\infty}\alpha_i = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left[C_\omega(\alpha_i,\omega)\right]^{-1} < +\infty,$$

можно дополнить членами γ_i $(i=1,2,\ldots)$ *таким образом, чтобы дополненная последовательность* $\{\beta_i\}_1^\infty$ *удовлетворяла условиям:*

(i) $\{\beta_i\}_1^\infty$ *– последовательность неубывающих положительных чисел,*

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}\left[C_\omega(\beta_i,\omega)\right]^{-1} < +\infty$,

(iii) $$\overline{\lim_{i\to\infty}}\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{\left[C(\beta_j,\omega)\right]^{-1}}{\left[C(\beta_j,\omega)\right]^{-1}+\left[C(\beta_{j+1},\omega)\right]^{-1}+\ldots+\left[C(\beta_i,\omega)\right]^{-1}}\right)^2 < +\infty\,.$$

3. Доказательство теоремы 1.1. Отметим, что если нули $\alpha_\mu, \mu=1,2,\ldots$ аналитической в $|z|<1$ функции $f(z)$ не удовлетворяют условию плотности

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_{|\alpha_\mu|}^{1}\omega(x)\,dx < +\infty,$$

то характеристика $T_\omega(r,f)$ не ограничена.

Теперь пополним последовательность $\{\alpha_i\}$ точками $\{\gamma_i\}$ таким образом, чтобы пополненная последовательность $\{\beta_i\}$, $\{\beta_i\}=\{\alpha_i\}\cup\{\gamma_i\}$ удовлетворяла условиям (i), (ii) и (iii) из леммы 2.1. Тогда в силу формулы (1)

$$\ln|f(z)| = \sum_{0<|a_\mu|\le\rho}\ln\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho}\right)\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z}{\rho}e^{-i\varphi};\omega\right)L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\right\}d\varphi\,.$$

Применив оператор $L^{(\omega)}$ к обеим частям этого равенства, получим

$$L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right\} = \sum_{0<|a_\mu|\le\rho}L^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{z}{\rho};\frac{a_\mu}{\rho}\right)\right|\right\} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0\left(\frac{z}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)};1\right)L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\right\}d\varphi,$$

откуда

$$L^{(\omega)}_{(+)}\left\{\ln\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right\} \le \sum_{0<|\alpha_\mu|\le\rho}L^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\rho e^{i\varphi}\right)\right|\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0\left(\frac{z}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)};1\right) L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\right\} d\varphi \qquad (2)$$

Далее, полагая, что $\{R_n\}$– монотонно возрастающая последовательность положительных чисел таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1} < +\infty ,$$

проведем концентрические круги с центром в точке $z=0$ и с радиусами R_n. Теперь определим последовательность $\{\lambda_n\}$. Для этого положим $\lambda_1=\beta_1$, а затем, предположив, что точки $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ уже определены, определим λ_n следующим образом: из точки A_{n-1} пересечения радиуса $O\lambda_{n-1}$ с окружностью $|z|=1$, в положительном направлении на единичной окружности отложим дугу длины $\left[C\left(\beta_{n-1};\omega\right)\right]^{-1}$. Обозначим другой конец этой дуги через A_n и проведем радиус OA_n. Через λ_n обозначим точку пересечения радиуса OA_n с окружностью $|z|=\beta_n$. Далее, обозначив $\theta_i=\arg\lambda$ в точке $\lambda_i,|\lambda_i|<R_n$, из (2) получим

$$L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \le \sum_{0<|a_\mu|\le R_n} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\Theta_i}}{R_n};\frac{a_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right) L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\} d\varphi ,$$

и, с умножением на $\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1}$,

$$\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \le \left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \sum_{0<|a_\mu|\le R_n} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta_i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right) d\varphi .$$

Суммируя эти неравенства по всем i, для которых

$$2\left[C\left(R_n;\omega\right)\right]^{-1} \le 1-\beta_i , \qquad (3)$$

получим

$$\sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(\lambda_i\right)\right|\right\} \le \sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} \sum_{0<|a_\mu|\le R_n} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta_i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}\sum_i\left[C\left(\beta_i;\omega\right)\right]^{-1} P_0\left(\frac{|\lambda_i|}{R_n}e^{i(\theta_i-\varphi)};1\right) d\varphi . \qquad (4)$$

Далее доказывается, что подынтегральная сумма правой части (4) ограничена. Следовательно

$$\sum_{1-\beta_i \ge [C(R_n;\omega)]^{-1}} \left[C(\beta_i;\omega)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(\lambda_i)\right|\right\} \le$$

$$\le \sum_{1-\beta_i \ge [C(R_n;\omega)]^{-1}} \left[C(\beta_i;\omega)\right]^{-1} \cdot \sum_{0<\alpha_\mu \le R_n} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} + c_3\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\phi}\right)\right|\right\}d\varphi$$

Очевидно, что это неравенство имеет место также для тех λ_i, для которых $\beta_i = |\lambda_i| = \alpha_i$, т.е.

$$\sum_{1-\alpha_i \ge [C(R_n;\omega)]^{-1}} \left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(\lambda_i)\right|\right\} \le$$

$$\le \sum_{1-\beta_i \ge [C(R_n;\omega)]^{-1}} \left[C(\beta_i;\omega)\right]^{-1} \cdot \sum_{0<|\alpha_\mu| \le R_n} L_{(+)}^{\omega}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} + c_3\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{\omega}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\phi}\right)\right|\right\}d\phi \quad (5)$$

Известно [2], что если последовательность $\{\alpha_\mu\}$ удовлетворяет условию теоремы, а $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $[0,1)$, то

$$B_\omega(z,\alpha_\mu) = B(z,\alpha_\mu)\exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{i\gamma}z;\omega\right)d\psi(\gamma)\right),\ |z|<1,$$

где $B(z,\alpha_\mu)$ – обычное произведение Бляшке, а $\psi(\gamma)$ – некоторая неубывающая, ограниченная на $[0;2\pi]$ функция. Примем, что равенство справедливо также для каждого фактора произведения $B_\omega(z,\alpha_\mu)$, т.е. для каждого μ

$$A_\omega(z,\alpha_\mu) = \frac{\alpha_\mu - z|\alpha_\mu|}{1-\bar{\alpha}_\mu z\alpha_\mu}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\gamma}z;\omega\right)d\psi(\gamma)\right\},\ |z|<1.$$

Отсюда следует, что

$$\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right| = \ln\left|\frac{\frac{\alpha_\mu}{R_n}-\frac{|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n}}{1-\frac{\bar{\alpha}_\mu|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n}}\right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\gamma;r;\omega)d\psi(\gamma).$$

Тем самым

$$L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|A_\omega\left(\frac{|\lambda_i|e^{i\theta i}}{R_n};\frac{\alpha_\mu}{R_n}\right)\right|\right\} = 0.$$

Следовательно, из (4) получим

$$\sum_{1-\alpha_i \ge [2C(R_n;\omega)]^{-1}} \left[C(\alpha_i;\omega)\right]^{-1} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f(\lambda_i)\right|\right\} \le c_3\int_0^{2\pi} L_{(+)}^{(\omega)}\left\{\ln\left|f\left(R_n e^{i\varphi}\right)\right|\right\}d\varphi, \quad (6)$$

чем и завершим доказательство.

Государственный инженерный университет Армении

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ա. Մ. Ջրբաշյան,
Ռ. Վ. Դալլաքյան

Շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների ω –բնութագրիչների մասին

Չնվազող $\omega(x)$ պարամետրի համար գտնված է մի պայման, որից հետևում է, որ շրջանում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիայի $T_\omega(r,f)$ բնութագրիչը անսահմանափակ է: $\omega(x)\equiv 1$ մասնավոր դեպքում, երբ $T_\omega(r,f)$, $N_\omega(r,f^{-1})$ ֆունկցիաները դառնում են Նևանլիննայի $T(r,f)$, $N(r,f^{-1})$ բնութագրիչներ, այդ պնդումն ապացուցված է Ա. Գ. Նաֆտալևիչի կողմից:

Академик В. С. Захарян, А. М. Джрбашян, Р. В. Даллакян

Об ω - характеристиках аналитических в единичном круге функций

Для случая неубывающего функционального параметра $\omega(x)$ найдено условие, обеспечивающее неограниченность характеристической функции $T_\omega(r,f)$ аналитических в единичном круге комплексной плоскости функций $f(z)$. В частном случае, когда $\omega(x)\equiv 1$ и функции $T_\omega(r,f)$, $N_\omega(r,f^{-1})$ переходят в неванлинновские характеристики $T(r,f)$, $N(r,f^{-1})$, это утверждение ранее было доказано А. Г. Нафталевичем.

Academician V. S. Zakaryan, A. M. Djrbashyan, R. V. Dallakyan

On ω - characteristics of the Analytic Functions in the Unit Disk

The condition sufficient for the unboundness of the characteristics function $T_\omega(r,f)$ of the analytic in the unit disk function f, is obtained for nondecreasind parameter $\omega(x)$. This assertion is a special case (when $\omega(x)\equiv 1$) and the functions $T_\omega(r,f)$, $N_\omega(r,f^{-1})$ transferred to Nevanlinna characteristic $T(r,f)$, $N(r,f^{-1})$ was proved earlier by Naftalevich.

Литература

1. *Джрбашян М. М.*- Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). С. 517-615.
2. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* - Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. М. Физ.-мат. лит. ВО “Наука”. 1993.
3. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* – Изв. АН СССР. Серия мат. 1970. 34. С. 1262-1339.
4. *Джрбашян А. М., Захарян В. С.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2009. Т.44. N6. С. 5-62.
5. *Джрбашян А. М.*- Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30 N 2. С.39-61.
6. *Нафталевич А. Г.* - Учен. зап. Вильнюсского ун. 1956.N5. С.5-27.