ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Папян

Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле

(Представлено академиком С. А. Амбарцумяном 14/VII 2012)

Ключевые слова: *магнитное поле, мембрана, затухание, частота колебаний*

Рассматривается колебание упругой изотропной пластинки постоянной толщины $2h$ и конечной электропроводности σ во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{B} = \left(B_1, B_2, B_3\right)$. Пластинка в декартовой системе координат xyz расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью xoy. Пластина в декартовой системе координат занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ и $-h \le z \le h$. Магнитная проницаемость материала пластинки считается равной единице, а электромагнитное свойство среды, окружающей пластинку, эквивалентным свойствам вакуума.

Для сведения трехмерной задачи магнитоупругих колебаний пластинки к двумерной принимаются следующие предположения:

- допущения для перемещения согласно теории пластин Кирхгофа

$$U_1(x, y, z, t) = U(x, y, t) - z\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \quad U_2(x, y, z, t) = V(x, y, t) - z\frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad \text{и}$$

$$U_3(x, y, z, t) = w(x, y, t), \tag{1}$$

здесь $U = U\left(x, y, t\right)$, $V = V\left(x, y, t\right)$ и $w = w\left(x, y, t\right)$ искомые перемещения срединной плоскости пластины;

- гипотеза магнитоупругости тонких тел С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Багдасаряна и М. В. Белубекяна относительно поведения компонент индуктивного электромагнитного поля [1]:

$$e_1 = f_1(x, y, t),\ e_2 = f_2(x, y, t) \ \text{и} \ h_3 = g(x, y, t). \tag{2}$$

Согласно принятым допущениям выражения для основных напряжений имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-v^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-v^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + v\frac{\partial U}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial \; w}{\partial x^2}\right)\right) \qquad (3)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right).$$

Из уравнений электродинамики для внутренней области с учетом (1) и (2) для оставшихся компонент индуцированного электромагнитного поля имеем [1]

$$\frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_1 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}B_3 - \frac{\partial U_3}{\partial t}B_2\right)\right)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{\partial h_3}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_2 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}B_1 - \frac{\partial U_1}{\partial t}B_3\right)\right) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_3 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}B_2 - \frac{\partial U_2}{\partial t}B_1\right)\right).$$

Проинтегрировав систему (4) по z в пределах от $-h$ до h получим

$$h_2 = \frac{h_2^+ + h_2^-}{2} - z\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_1 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}B_3 - \frac{\partial U_3}{\partial t}B_2\right)\right)\right)$$

$$h_1 = \frac{h_1^+ + h_1^-}{2} - z\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_2 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}B_1 - \frac{\partial U_1}{\partial t}B_3\right)\right)\right) \qquad (5)$$

$$e_3 = \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}B_2 - \frac{\partial U_2}{\partial t}B_1\right).$$

Дифференциальные уравнения движения в декартовой системе координат имеют следущий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + K_1 = \rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + K_2 = \rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + K_3 = \rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2},$$

где $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$ – объемная сила, обусловленная взаимодействием упругих перемещений и электромагнитного поля (пондермоторная сила). K_1, K_2, K_3 – компоненты объемной силы.

Приведем выражение $\vec{K}=(K_1,K_2,K_3)$ для частного случая поперечного магнитного поля $\vec{B}=(0,0,B_3)$

$$K_1=\frac{\sigma}{c}(e_2-\frac{1}{c}\frac{\partial U_1}{\partial t}B_3)B_3,\ K_2=\frac{\sigma}{c}(e_1+\frac{1}{c}\frac{\partial U_2}{\partial t}B_3)B_3 \text{ и } K_3=0. \tag{7}$$

Для внутренних усилий и моментов имеем

$$T_1=C\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial V}{\partial y}\right),\ T_2=C\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\nu\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$S=\frac{1-\nu}{2}C\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right),\ M_1=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{8}$$

$$M_2=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\quad H=-(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},$$

где $C=\frac{2Eh}{1-\nu^2}$, $D=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$.

Проинтегрировав каждое из уравнений движения (3) по z в пределах от $-h$ до h, далее умножив первые два из них на z и вновь проинтегрировав полученные выражения по z в тех же пределах, получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{2h\sigma}{c}(e_2-\frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t}B_3)B_3=2h\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{2h\sigma}{c}(e_1+\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}B_3)B_3=2h\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}=2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-N_1+\frac{\sigma 2h^3}{c^2 3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}B_3^2=-\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}-N_2+\frac{\sigma 2h^3}{c^2 3}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}B_3^2=-\frac{2}{3}\rho h^3\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}. \tag{10}$$

Подставляя значение N_1 и N_2 в третье уравнение системы (9), с учетом (8) получаем

$$D\Delta\Delta w-\frac{\sigma B_3^2}{c^2}\frac{2h^3}{3}\frac{\partial\left(\Delta w\right)}{\partial t}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{11}$$

Если пластина равномерно растянута по направлением Ox и Oy, пренебрегая жесткостью на изгиб, получим

$$p\Delta w+\frac{\sigma B_3^2}{c^2}\frac{2h^3}{3}\frac{\partial\left(\Delta w\right)}{\partial t}-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \tag{12}$$

Граничные условия закрепленой по краям мембраны имеют вид

$w = 0$ при $x = 0, a;$ $w = 0$ при $x = 0, b,$

Решение уравнения (12) будем искать в следующем виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(t\right)_{mn} \sin\mu_m x \sin\lambda_n y, \tag{13}$$

где $\mu_m = \frac{\pi m}{a}$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{b}$

Подставляя значение (13) в уравнение (12) и делая несколько сокращений, получим

$$\ddot{f}_{mn} + \frac{h^2}{3}\frac{\sigma B_3^2}{c^2\rho}\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)\dot{f}_{mn} + \frac{p\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)}{2\rho h} f_{mn} = 0, \tag{14}$$

где $\frac{h^2}{3}\frac{\sigma B_3^2}{c^2\rho}\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right) = \beta$, $\frac{p\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)}{2\rho h} = \gamma.$

Решение уравнения (14) будем искать в виде $f_{mn} = e^{\omega t}$. Подставляя f_{mn} в уравнение (14), получим квадратное уравнение относительно частот колебаний

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0, \quad \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2}, \tag{15}$$

где $0.5\sqrt{4\gamma - \beta^2}$ – частота колебаний, 0.5β – коэффицент затухания. Рассмотрим случай, при котором частота колебаний равна нулю

$$\frac{2p\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)}{\rho h} = \frac{h^4}{9}\frac{\sigma^2 B_3^4}{c^4\rho^2}\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)^2, \tag{16}$$

где $p = 2\sigma_0 h,$ $\frac{B_3^4}{16\pi^2\rho^2 c^4} = \frac{9\sigma_0}{4\pi^2\rho h^4\sigma^2\left(\mu_m^2 + \lambda_n^2\right)}.$

Приведем численные примеры для медной мембраны $\nu = 0,3$, $\sigma = 5,3\times10^{17}$ 1/с, $\rho = 8.9$ г/см^3, $c = 3\times10^{10}$ см/с, $\sigma_0 = 6.85\times10^8$ г/смс^2, пластинка квадратная $a = b$, соотношение толщины к стороне $h/a = 0.2$.

Рассмотрим следующие случаи: а) $m = 1$, $n = 1$, б) $m = 1$, $n = 2$, в) $m = 2$, $n = 1$ и г) $n = 2$, $m = 2$. В таблице приведены величины магнитного поля, при котором частота колебаний равна нулю, в случаях а- г. Таблица составлена для $h/a = 0.2$

m	n	B [$г^{\frac{1}{2}} см^{-\frac{1}{2}} сек^{-1}$]
1	1	9472.59
1	2	7533.27
2	1	7533.27
2	2	6698.13

Из таблицы следует, что влияние магнитного поля существенно для высоких форм колебаний.

Институт механики НАН РА

А. А. Папян

Колебание проводящей прямоугольной мембраны в поперечном магнитном поле

На основе теории пластин Кирхгофа и гипотезы магнитоупругости тонких тел С. А. Амбарцумяна, Г. Е. Багдасаряна, М. В. Белубекяна решается задача магнитоупругих колебаний для мембраны. Исследуется влияние магнитного поля на частоты колебаний.

Ա. Ա. Պապյան

Հաղորդիչ ուղղանկյուն մեմբրանի տատանումները ուղղահայաց մագնիսական դաշտում

Կիրհոֆի սալերի տեսության և Ս. Ա. Համբարձումյանի, Գ. Ե. Բաղդասարյանի, Մ. Վ. Բելուբեկյանի՝ բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի հիման վրա լուծվում է մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը մեմբրանի համար: Հետազոտված է մագնիսական դաշտի ազդեցությունը տատանման հաճախություն-ների վրա:

A. A. Papyan

The Vibrations of Conductive Rectangle Membrane in the Transverse Magnetic Field

On the basis of the theory of Kirchhoff’s plate and the hypothesis of magnetoelasticity of thin bodies of S. A. Ambartzumian, G. E. Baghdasaryan, M. V. Belubekyan, the problem of the vibration of magneto-elasticity for membrane is solved. The influence of the magnetic field on the vibration frequencies is investigated.

Литература

1. *Амбацумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
2. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Некоторые задачи электромагнитоупругости пластины. Изд. ЕГУ. 1991. 144 с.
3. *Белубекян В. М., Белубекян М. В.*- Изв. НАН Армении. 1999. Т. 52. №2. С. 11 – 12.