ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 4

**МАТЕМАТИКА**

**УДК 517.5.53**

**А. Н. Айрапетян**

# Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/IV 2012)

**Ключевые слова**: *сферические производные, точки Жюлиа, $P$-последовательность, аннулярная функция*

В настоящей заметке теорема Э. Коллингвуда [1] о граничных особенностях функций Цудзи усиливается и распространяется на более широкий класс мероморфных функций с суммируемой сферической производной.

Рассматривается также поведение на границе аннулярных голоморфных функций.

1. Пусть символ $D$ обозначает единичный круг $|z|<1$, $\Gamma$ – окружность $|z|=1$ на комплексной $z$-плоскости $C$ и $d\sigma(z)=(1-|z|^2)^{-1}|dz|$ – линейный элемент гиперболической метрики в $D$. Для произвольных $\theta$, $0\le\theta<2\pi$, и $\alpha$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, символом $\Gamma_\zeta$ обозначим окружность, проходящую через точку $z=0$ и касающуюся $\Gamma$ в ее точке $\zeta=e^{i\theta}$, а символом $h(\zeta,\alpha)$ – хорду окружности $\Gamma_\zeta$, оканчивающуюся в точке $\zeta$ и образующую с диаметром в $\zeta$ направленный угол $\alpha$, $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$.

Подобласть круга $D$, ограниченную $h(\zeta,\alpha_1)$ и $h(\zeta,\alpha_2)$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$, и $\Gamma_\zeta$, обозначим символом $\Delta(\zeta,\alpha_1,\alpha_2)$.

Рассмотрим мероморфную в $D$ функцию $f$ со значениями на сфере Римана $\Omega$ над $C$, и пусть $f^*(z)$ обозначает ее сферическую производную $|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)=f^*(z)$ , $z\in D$. Функцию $f$ назовем функцией Цудзи (функцией с суммируемой сферической производной), если

$$\underset{0<r<1}{Sup}\int_0^{2\pi} f^*(re^{i\theta})d\theta < +\infty\left(\int\int_D f^*(z)dxdy < +\infty, z = x+iy\right). \qquad (1)$$

Функции Цудзи рассмотрены в [1], функции с суммируемой сферической производной – в [2]. Определения (1) показывают, что каждая функция Цудзи является функцией с суммируемой сферической производной.

Отрезок $h(\zeta,\alpha)$ называют отрезком Жюлиа для $f$, если для любых $\alpha_1$ и $\alpha_2$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$, функция $f$ принимает в $\Delta(\zeta,\alpha_1,\alpha_2)$ бесконечно часто каждое значение из $\Omega$, за возможными не более двумя исключениями. Точку $\zeta\in\Gamma$ называют точкой Жюлиа функции $f$ и относят к множеству $J(f)$, если все $h(\zeta,\alpha)$ служат для $f$ отрезками Жюлиа. Последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|=1$, называют $P$-последовательностью для мероморфной в D функции $f$, если для любого числа $\varepsilon>0$ и любой подпоследовательности $\{z_{n_\nu}\}$ в объединении неевклидовых (гиперболических) кругов $\{z;\sigma(z;z_{n_\nu})<\varepsilon\}$ функция $f$ принимает бесконечно часто каждое значение из $\Omega$, за возможными не более двумя исключениями. Отрезок $h(\zeta,\alpha)$ назовем $P$-отрезком для функ=ции $f$, если он содержит некоторую ее $P$-последовательность, и точку $\zeta\in\Gamma$ отнесем к множеству $P(f)$, если каждая хорда $h(\zeta,\alpha)$ является $P$-отрезком для $f$. Простейшие свойства гиперболической (неевклидовой) геометрии в круге $D$ показывают, что каждый $P$-отрезок мероморфной в $D$ функции $f$ обязан быть для нее отрезком Жюлиа, и следовательно $P(f)\subset J(f)$.

Известно также, что вложение строгое (см., например, [3], теорема 3, или [4], теорема 2). Как обычно, символом $F(f)$ обозначается множество всех точек Фату функции $f$, т.е. множество точек $\zeta\in\Gamma$, в которых $f(z)$ имеет предел $f(\zeta)\in\Omega$, когда $z$ стремится к $\zeta$, оставаясь внутри каждой области $\Delta(\zeta,\alpha_1,\alpha_2)$, и значение $f(\zeta)$ не зависит от выбора этой области.

2. Э. Коллингвуд [1] доказал, что у произвольной мероморфной функции Цудзи почти все точки на Г являются либо ее точками Фату, либо точками Жюлиа. Обобщением и усилением этого результата служит

**Теорема 1.** *Для произвольной мероморфной функции $f$ с суммируемой сферической производной почти все точки на Г принадлежат объединению*

$$F(f)\cup P(f).$$

Покажем, что сформулированное утверждение представляет собой частный случай результата общего характера (см [3], теорема 2), согласно которому для любой мероморфной в круге $D$ функции $f$ справедливо представление $\Gamma=F(f)\cup P(f)\cup I^*(f)\cup E$, в котором линейная лебегова мера $mesE=0$ и $I^*(f)$ обозначает множество тех точек $\zeta\in\Gamma$, в которых ни одна из хорд $h(\zeta,\alpha)$ не содержит $P$-последовательностей функции $f$ и предельные множества $C(f,h(\zeta,\alpha))=\Omega$ по всем хордам $h(\zeta,\alpha)$, $\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ (о стандартной терминологии в теории предельных множеств см., например, [5], с. 11).

Чтобы обосновать это утверждение, воспользуемся основным результатом статьи [2], теорема 1, согласно которому для произвольной функции $f$ с суммируемой сферической производной на Γ существует множество $M$, $mesM=2\pi$, в каждой точке $\zeta$ которого функция $f(z)$ имеет конечные пределы, когда $z\to\zeta$ по хордам $h(\zeta,\alpha)$ для почти всех $\alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. На основании этого результата заключаем, что у любой функции $f$ с суммируемой сферической производной множество $M\bigcap I^{*}(f)$ пустое, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Отметим, что в статье Э. Коллингвуда и Дж. Пираняна [6] приведены примеры функций Цудзи, у которых либо множество точек Фату имеет полную меру на Γ, либо все точки Γ являются точками Жюлиа. Более того, на самом деле, в силу известных свойств $P$-последовательностей в последнем из этих примеров все точки на Γ принадлежат множеству $P(f)=J(f)$ (аналогичная аргументация использована в статье [7] в доказательстве теоремы 2.)

3. В этом пункте рассмотрим структуру граничных особенностей аннулярных функций, введенных в [8].

Аннулярной называют голоморфную в круге $D$ функцию, для которой

$$\lim_{n\to+\infty}\min\left\{\left|f(z)\right|;z\in L_n\right\}=+\infty \qquad (2)$$

по некоторой последовательности замкнутых жордановых кривых $L_n$, $n\in N$, лежащих в круге $D$ и охватывающих точку $z=0$. В традиционной терминологии теории предельных множеств (см. [5], с. 96) определение (2) означает, что множество $\Phi(f,\zeta)$ содержит значение $\infty$ в каждой точке $\zeta\in\Gamma$.

В [8] приведен пример аннулярной функции $f$, у которой $J(f)=\Gamma$.

**Теорема 2.** *Для произвольной аннулярной функции $f$ справедливо представление $\Gamma=P(f)\bigcup E$, в котором E–множество первой категории и типа $F\sigma$ на $\Gamma$.*

Для доказательства утверждения теоремы 2 воспользуемся другим, установленным в [3], теорема 1, результатом общего характера.

Для любой мероморфной в $D$ функции $f$ справедливо представление $\Gamma=M(f)\bigcup P(f)\bigcup\tilde{I}^{*}(f)\bigcup E$, в котором $E$ – множество первой категории и типа $F\sigma$ на Γ, символом $M(f)$ обозначено множество точек $\zeta\in\Gamma$, в которых предельное множество $C(f,\zeta)$ по всему кругу $D$ не покрывает всю сферу Римана Ω и совпадает с предельными множествами

$C(f,h(\zeta,\alpha))$ для всех значений $\alpha \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, а $\tilde{I}^*(f)$ обозначено множество тех точек $\zeta \in \Gamma$, которые не являются предельными для $P$ - последовательностей функции $f$ и в которых предельные множества $C(f,h(\zeta,\alpha)) = \Omega$ по всем хордам $h(\zeta,\alpha)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ (так что $\tilde{I}^*(f) \subset I^*(f)$).

Хорошо известно (см., например, [5], с. 107), что первое из свойств точки $\zeta \in M(f)$ влечет существование такой дуги γ на $\Gamma$, которая содержит точку $\zeta$ и на которой $mes(F(f) \bigcap \gamma) = mes\gamma > 0$. Так как для аннулярной функции $f$ множество $\Phi(f,\zeta)$ в каждой точке $\zeta \in \Gamma$ содержит значение $\infty$, то в любой точке $\zeta \in F(f)$ угловое граничное значение $f(\zeta)$ обязано быть равным $\infty$, и поэтому предположение, что $mesF(f) > 0$, невозможно в силу классической теоремы Лузина – Привалова.

Таким образом, множество $M(f)$ пустое у любой аннулярной функции $f$.

Далее, поскольку каждая точка $\zeta \in \tilde{I}^*(f)$ не является предельной для $P$-последовательностей функции $f$, то согласно [4], лемма 1, множество $\Phi(f,\zeta)$ в каждой точке $\zeta \in \tilde{I}^*(f)$ обязано быть пустым. С другой стороны, как отмечалось выше, для любой аннулярной функции $f$ множество $\Phi(f,\zeta)$ непусто в каждой точке $\zeta \in \Gamma$. Таким образом, у любой аннулярной функции $f$ наряду с $M(f)$ пустым является также и множество $\tilde{I}^*(f)$, что завершает доказательство теоремы 2.

**Следствие.** *Для произвольной аннулярной функции $f$ с суммируемой сферической производной имеет место представление*

$$\Gamma = P(f) \bigcup E, \text{ в котором } mesE = 0.$$

Действительно, согласно теореме 1

$\Gamma = F(f) \bigcup P(f) \bigcup E$ и $mesE = 0$, в то время как в доказательстве теоремы 2 отмечалось, что $mesF(f) = 0$.

Остается открытым вопрос: совпадают множества $E$ в утверждениях этого следствия и теоремы 2.

Выражаю благодарность моему учителю, профессору В.И. Гаврилову за обсуждение полученных результатов.

Государственный инженерный университет Армении

### А. Н. Айрапетян

### Граничные особенности функций с суммируемой сферической производной и аннулярных функций

Теорема Э. Коллингвуда о граничных особенностях функций Цудзи усиливается и распространяется на более широкий класс мероморфных функций с суммируемой сферической производной.

### Ա. Ն. Հայրապետյան

### Սֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի և անուլյար ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունները

Ընդհանրացվում և ուժեղացվում է Կոլինգվուդի թեորեմը Ցուձիի ֆունկցիաների եզրային առանձնահատկությունների վերաբերյալ և տարածվում մերոմորֆ ֆունկցիաների ավելի լայն դասի վրա, որոնք սֆերիկ ածանցյալով ինտեգրելի են: Դիտարկվում է նաև անուլյար հոլոմորֆ ֆունկցիաների վարքը եզրագծի վրա:

### A. N. Hayrapetyan

### Boundary Characteristics of Summerizing Spherical Derivative and Annular Function

The Collingwood theorem concerning boundary characteristics of Tsuji functions which strengthen and spread over a larger set of meromorphic functions with summerizing spherical derivative is discussed.

The behaviour of the considered function on the boundary of annular holomorphic functions is also touched upon.

### Литература


1. *Collingwood E. F.* - Nagoya Math. 1967. V. 29. P. 197-200.
2. *Гаврилов В. И.* - Сибирск. матем. ж. 1973. Т. 14. N 5. С. 951-956.
3. *Гаврилов В. И.* - ДАН СССР. 1974. Т. 216. N 1. С. 21-23.
4. *Гаврилов В. И.* - Вестн. МГУ. Сер. матем. и мех. 1976. N 4. С. 36-43.
5. *Носиро К.* Предельные множества. М. ИЛ. 1963. 252 с.
6. *Collingvood E. F., Piranian G.* - Math. Zeitschr. 1964. B. 84. N 3. P. 246-253.
7. *Гаврилов В. И. , Канатников А. Н.* - ДАН СССР. 1977. Т. 232. N 6. С. 1237-1240.
8. *Bonar D.D.* On annular functions. Berlin,VEB Deutscher Verlag Wiss. 1971.