ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 112 2012 № 1

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

**С. М. Варданян**

# О минимальности некоторых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств относительно операций пересечения и дополнения

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 27/IV 2011)

**Ключевые слова:** *распознающие системы, пересечение и дополнение множеств, минимальность*

Рассматриваются распознающие системы множеств, определяемые аналогично соответствующим понятиям из [1 – 6]. Понятие распознающей системы, рассматриваемое ниже, отличается от аналогичного понятия из [4 – 6] тем, что в роли операций, применяемых к множествам данной системы, фигурируют не только операция пересечения множеств, но также и операция дополнения множества до данного универсального множества.

Оказывается, что для распознающих систем в этом смысле могут быть получены значительно более четкие характеристики минимальных распознающих систем по сравнению с [4, 5]. Те понятия, которые не определяются ниже, определены в [7].

Рассмотрим конечное множество $[n]=\{1,2,...,n\}$, $n\geq 3$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть $n^*=\{A_1,A_2,...,A_k\}$ является подмножеством множества $R[n]$.

**Определение 1.** *Будем говорить, что система $n^*$ распознает элемент $i\in[n]$, если с помощью операций пересечения и дополнения (по отношению к $[n]$) из множеств $A_1,A_2,...,A_k$ можно получить $\{i\}$.*

**Определение 2.** *Будем говорить, что* $n^*$ *является* $n$ *распознающей системой, если система* $n^*$ *распознает каждый элемент* $i \in [n]$.

Посредством $|A|$, где $A$ – какое-либо множество, будем обозначать мощность множества $A$. Так как $R[n]$ является $n$- распознающей системой, то класс $n$-распознающих систем заведомо не является пустым. Определим обычные понятия минимальности и тупиковости для $n$-распознающих систем.

**Определение 3.** $n$*-распознающая система* $n^*$ *называется тупиковой, если любое собственное подмножество множества* $n^*$ *не является* $n$*-распознающей системой.*

**Определение 4.** $n$*-распознающая система* $n^*$ *называется минимальной, если не существует* $n$*-распознающей системы с мощностью, меньшей, чем* $|n^*|$.

Если рассматривается минимум не в классе всех распознающих систем, а только в определенном его подклассе, то такие минимумы будем называть локальными минимумами. В этой статье рассматриваются такие распознающие системы, элементы которых являются двухэлементными подмножествами множества $[n]$. Каждой такой распознающей системе сопоставим граф следующим образом. Каждому элементу множества $[n]$ сопоставим вершину указанного графа, при этом различным элементам сопоставим различные вершины. Две различные вершины соединим ребром в том и только в том случае, когда соответствующие элементы принадлежат одному и тому же множеству данной системы. Граф, построенный указанным образом, будем называть представляющим графом данной $n$-распознающей системы. Ясно, что представляющий граф $n$-распознающей системы определяет ее однозначно (с точностью до изоморфизма; изоморфизм $n$-распознающих систем определяется естественным образом). Мы иногда будем отождествлять $n$-распознающую систему с ее представляющим графом, говоря о ее свойствах как о свойствах ее представляющего графа. Все необходимые определения, связанные с графами, можно найти в [7]. Длиной цепи $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ (а также ее мощностью) будем называть количество ребер в ней, т.е. число $(k-1)$; такую цепь будем обозначать посредством $Q_k$. Изолированные вершины графа будем называть цепями длины нуль; такую цепь будем обозначать посредством $Q_1$. Через $\left|T_2^n\right|$ будем обозначать мощность минимальной $n$-распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств.

**Основная теорема.** *Если* $n \geq 3$, *то*

$$\left|\mathrm{T}_2^{\mathrm{n}}\right| = \begin{cases} \frac{2}{3}\mathrm{n} & \text{если} \quad \mathrm{n} \equiv 0 \pmod 3; \\ \frac{2}{3}(\mathrm{n}-1) & \text{если} \quad \mathrm{n} \equiv 1 \pmod 3; \\ \frac{2}{3}(\mathrm{n}-2)+1 & \text{если} \quad \mathrm{n} \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Для доказательства сначала установим верхнюю оценку для $\left|T_2^n\right|$. Пусть задано некоторое $n \geq 3$. Построим граф $G_n$, удовлетворяющий следующим условиям. Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то граф $G_n$ состоит из $\frac{n}{3}$ компонент связности, каждая из которых изоморфна цепи $Q_3$. Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то граф $G_n$ содержит $\frac{n-1}{3}$ компонент связности, каждая из которых изоморфна $Q_3$, и, кроме того, одну компоненту, изоморфную $Q_1$. Если $n \equiv 2 \pmod 3$, то граф $G_n$ содержит $\frac{n-5}{3}$ компонент связности, каждая из которых изоморфна $Q_3$, и, кроме того, две компоненты связности, изоморфные соответственно $Q_4$ и $Q_1$. Легко проверить, что при любом $n \geq 3$ граф $G_n$ является представляющим графом некоторой $n$-распознающей системы и количество ребер в нем равно величине, указанной в формулировке основной теоремы для $\left|T_2^n\right|$. Тем самым установлена верхняя оценка для $\left|T_2^n\right|$. Теперь установим нижнюю оценку. Сначала приведем некоторые леммы.

**Лемма 1.** *Если* $n^* = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ *является* $n$*-распознающей системой, то объединение всех* $A_i$ *может не содержать самое большее один элемент множества* $[n]$.

В самом деле, пусть имеет место обратное, т.е. $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ не содержит двух различных элементов $x, y$, принадлежащих $[n]$. Тогда $x$ и $y$ не принадлежат каждому $A_i$, $i = \overline{1, k}$, и будут принадлежать каждому $B_i = \overline{A_i}$. Очевидно, что в результате любых операций пересечения и дополнения над системой $A_1, A_2, ..., A_k$, $B_1, B_2, ..., B_k$ получится множество, которое или одновременно не будет содержать $x$ и $y$, или одновременно будет содержать и $x$ и $y$. В результате $x$ и $y$ нельзя отличить друг от друга и, следовательно, нельзя распознать. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$, представляющий граф которой содержит циклы, можно построить $n$-распознающую систему $S^*$, $S^* \subset S$, $\left|S^*\right| < |S|$ представляющий граф которой не содержит циклов.*

В самом деле, пусть представляющий граф $n$-распознающей системы $S$ содержит цикл $\{v_1, v_2, ..., v_{m-1}, v_m, v_1\}$ (заметим, что $m \geq 3$ и при $m = 3$ вершина $v_4$ совпадает с $v_1$). Легко проверить, что если из представляющего графа системы $S$ мы удалим, например, ребро $\{v_1, v_2\}$, то получившийся в результате граф будет представляющим графом некоторой $n$-распознающей системы и будет содержать на одно ребро меньше и на один цикл меньше по сравнению с первоначальным графом. Повторяя эту процедуру, придем к требуемой системе $S^*$.

**Следствие 1.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$, представляющий граф которой содержит цикл, можно построить $n$-распознающую систему $S^*$, $S^* \subset S$, $\left|S^*\right| < |S|$, представляющий граф которой является лесом.*

**Лемма 3.** *Любая $n$-распознающая система не может содержать множества, которое не пересекается ни с одним другим множеством данной системы.*

В самом деле, пусть имеет место обратное, и пусть, например, множество $A_1 = \{x, y\}$ не пересекается ни с одним из множеств $A_2, A_3, ..., A_k$ некоторой $n$-распознающей системы $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$. Рассуждая аналогично доказательству леммы 1, убеждаемся в том, что каждое множество, получаемое при помощи операций пересечения и дополнения, исходя из $A_1, A_2, ..., A_k$ либо содержит одновременно $x$ и $y$, либо не содержит ни одного из них. Но это противоречит тому, что $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ $n$-распознающая система.

**Лемма 4.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$, представляющий граф которой является лесом, существует $n$-распознающая система $S^*$, $\left|S^*\right| = |S|$, представляющий граф* *которой является лесом, причем каждая компонента связности этого леса представляет собой цепь.*

В самом деле, рассмотрим некоторую компоненту связности данного леса. Пусть это будет дерево, содержащее $m$ вершин и, следовательно, содержащее $(m-1)$ ребер. Так как любое дерево, содержащее $m$ вершин, содержит $(m-1)$ ребер, следовательно, первоначальное дерево можно заменить цепью, состоящей из $(m-1)$ ребер $\{v_1, v_2, ..., v_\mathrm{m}\}$. Очевидно, что все вершины этой цепи распознаваемы и останутся такими же. После аналогичных замен во всех компонентах получим $n$-распознающую систему $S^*$ и очевидно, что $\left|S^*\right| = |S|$.

**Лемма 5.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$, представляющий граф которой содержит цепь длиною $\geq 5$, можно построить $n$-распознающую систему $S^*$, $S^* \subset S$, $\left|S^*\right| < |S|$, представляющий граф который содержит только такие цепи, число ребер в которых $\leq 4$.*

В самом деле, пусть представляющий граф системы $S$ содержит цепь $\{v_1, v_2, v_3, v_4, ..., v_\mathrm{m}\}$, где $m \geq 6$. Легко видеть, что после удаления ребра $\{v_3, v_4\}$ оставшийся граф будет снова представляющим графом некоторой $n$-распознающей системы. Повторяя эту процедуру, получим требуемую систему $S^*$.

На основе доказанных лемм и следствия 1 получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$ существует $n$-распознающая система $S^*$ такая, что $\left|S^*\right| \leq |S|$ и представляющий граф для $S^*$ есть лес, все связные компоненты которого суть цепи, состоящие из 0, 2, 3 или 4 ребер.*

Рассмотрим теперь преобразования леса, все связные компоненты которого суть цепи, состоящие из 0, 2, 3 или 4 ребер. Заметим, что количество цепей длиною нуль будет $\leq 1$ (по лемме 1).

**Лемма 6.** *Если в $n$-распознающей системе $S$ существуют две цепи длиною 3, то эти две цепи можно зменить одной цепью длиною 2 и одной цепью длиною 4, причем полученная система $S^*$ будет $n$-распознающей и $\left|S^*\right| = |S|$.*

Действительно, цепи $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ можно заменить цепями $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{u_4, u_1, u_2, u_3, u_4\}$, причем распознаваемость всех элементов сохранится и число ребер в сумме не увеличится.

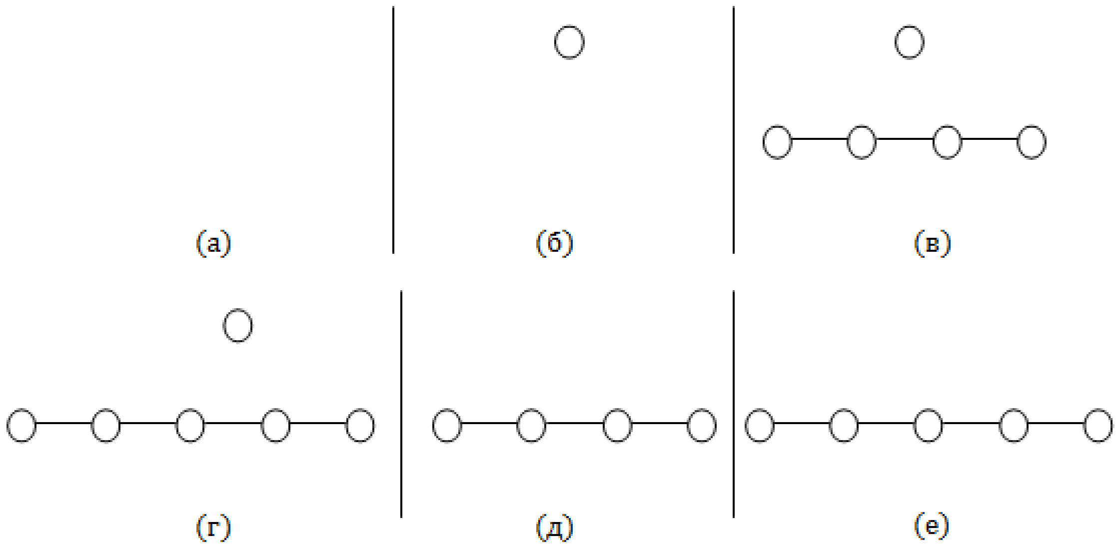
**Лемма 7.** *Если в $n$-распознающей системе $S$ существуют две цепи длиною 4, то эти две цепи можно заменить двумя цепями длиною 2 и одной цепью длиною 3, причем полученная система $S^*$ будет $n$-распознающей и $\left|S^*\right| < |S|$.*

Действительно, цепи $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ можно заменить цепями $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_4, v_5, u_1\}$ и $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, причем распознаваемость всех элементов сохранится и число ребер в сумме уменьшится на единицу.

**Лемма 8.** *Если в $n$-распознающей системе $S$ существует хотя бы одна цепь длиною 3 и хотя бы одна цепь длиною 4, то эти две цепи можно заменить тремя цепями длиною 2, причем полученная система $S^*$ будет $n$-распознающей и $\left|S^*\right| < |S|$.*

Действительно, цепи $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ можно заменить цепями $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_4, u_1, u_2\}$ и $\{u_3, u_4, u_5\}$. Легко убедиться в том, что все вершины распознаваемы и $\left|S^*\right| < |S|$.

**Лемма 9.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$, представляющий граф которой является лесом со связными компонентами, изоморфными $Q_1, Q_3, Q_4$ или $Q_5$, существует $n$ - распознающая система $S^*$ такая, что $\left|S^*\right| \le |S|$ и связные компоненты представляющего графа системы $S^*$ суть, во-первых, цепи, изоморфные $Q_3$, во-вторых, цепи, удовлетворяющие следующим условиям, указанным ниже для случаев (а) – (е), а именно: в случае (а) других связных компонент нет; в случае (б) – (е) другие связные компоненты представляющего графа системы $S^*$ суть: в случае (б) – цепь, изоморфная $Q_1$; в случае (в) – цепи, изоморфные $Q_4$ и $Q_1$; в случае (г) – цепи, изоморфные $Q_5$ и $Q_1$; в случае (д) – цепь, изоморфная $Q_4$; в случае (е) – цепь, изоморфная $Q_5$ (рисунок).*




В самом деле, используя преобразования, указанные в леммах 6 – 8, можно построить последовательность преобразований представляющего графа системы $S$, в процессе которых уже возникшие цепи, изоморфные $Q_3$, не затрагиваются, а цепи, изоморфные $Q_4$ и $Q_5$, систематически уничтожаются до тех пор, пока их количество не сведется к одной цепи (либо изоморфной $Q_4$, либо изоморфной $Q_5$). При этом должно быть учтено то обстоятельство, что первоначальный граф системы $S$ может содержать изолированную вершину.

**Теорема 2.** *Для всякой $n$-распознающей системы $S$ существует $n$-распознающая система $S^*$ такая, что $\left|S^*\right| \le |S|$ и представляющий граф системы $S^*$ состоит из связных компонент, изоморфных цепи $Q_3$, и из связных компонент, указанных в лемме 9 для случаев (а , б, в).*

В самом деле, из ранее доказанных утверждений следует, что существует система $S^*$ такая, что $\left|S^*\right| \le |S|$ и представляющий граф системы $S^*$ состоит из связных компонент, изоморфных $Q_3$, и из связных компонент, указанных в лемме 9 для случаев (а) – (е). Однако в случае (г) указанный фрагмент представляющего графа $S^*$ можно заменить двумя цепями, изоморфными $Q_3$ (число ребер сохраняется), в случае (д) – двумя цепями, изоморфными $Q_3$ и $Q_1$ (число ребер уменьшается на 1), в случае (е) –двумя цепями, изоморфными $Q_4$ и $Q_1$ (число ребер уменьшается на 1). В результате переходим к одному из случаев (а), (б), (в), что и требовалось.

Из теоремы 2 следует нижняя оценка мощности минимальной $n$-распознающей системы, указанная в основной теореме. В самом деле, легко проверить, что представляющий граф системы $S^*$, построенный в соответствии с теоремой 2, изоморфен графу $G_n$, описанному выше. Поскольку число ребер в графе $G_n$ равно величине, указанной в формулировке основной теоремы для $\left|T_2^n\right|$, заключаем, что предположение о существовании $n$-распознающей системы $S$, мощность которой меньше указанной величины, приводит к противоречию. Этим устанавливается нижняя оценка для $\left|T_2^n\right|$, а значит, и утверждение основной теоремы в целом.

**Замечание 1.** *При* $n \equiv 0 \pmod 3$ *и* $n \neq 3$ *существует другая минимальная* $n$*-распознающая система, представляющий граф которой существенно отличается от графа* $G_n$*, а именно, две цепи длиною два можно заменить фрагментом, описанным выше для случая (г) (рисунок).*

**Замечание 2.** *Так как вместе с операцией пересечения множеств используется также и операция дополнения, следовательно, доказанная теорема верна и для* $(n-2)$*-элементных подмножеств, а также для смешанных 2- и* $(n-2)$ *-элементных подмножеств.*

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

**С. М. Варданян**

**О минимальности некоторых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств относительно операций пересечения и дополнения**

Пусть $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. Система подмножеств $n^* = \{A_1, A_2,\ldots,A_k\}$ множества $[n]$ называется $n$-распознающей, если любое одноэлементное множество $\{i\}$, $1 \le i \le n$, можно получить на основе $A_1, A_2,\ldots,A_k$ с помощью операций дополнения и пересечения. Такая система называется минимальной, если не существует распознающая система меньшей мощности, чем рассматриваемая. Рассматриваются такие распознающие системы, которые состоят из двухэлементных подмножеств. Найдена мощность минимальной распознающей системы; построены такие системы.

Ս. Մ. Վարդանյան

## Հատման և լրացման գործողություններով երկէլեմենտանոց ենթաբազմությունների դասում որոշ ճանաչող համակարգերի մինիմալության մասին

Դիցուք $[n]=\{1,2,...,n\}$: $[n]$–ի ենթաբազմությունների $n^*=\{A_1,A_2,...,A_k\}$ համակարգը կոչվում է $n$- ճանաչող, եթե կամայական մեկ էլեմենտանոց բազմություն $\{i\}$, $1\le i\le n$, կարելի է ստանալ $A_1,A_2,...,A_k$ - երի հիման վրա հատման և լրացման գործողություններով: Այդպիսի համակարգը կոչվում է մինիմալ, եթե գոյություն չունի ավելի փոքր հզորությամբ $n$ - ճանաչող համակարգ: Դիտարկվում են այնպիսի համակարգեր, որոնք պարունակում են միայն երկէլեմենտանոց ենթաբազմություններ: Աշխատանքում գտնվում է մինիմալ $n$-ճանաչող համակարգերի հզորությունը և կառուցվում են $n$-ճանաչող համակարգեր, որոնք ունեն մինիմալ հզորություն:

**S. M. Vardanyan**

## On the Minimality of Some Recognizing Systems in the Class of Two-Element Subsets Concerning the Operations of Intersection and Complement

A set of subsets $n^*=\{A_1,A_2,...,A_k\}$ of a finite set $[n]=\{1,2,...,n\}$ is said to be $n$-recognizing if any one-element set $\{i\}$, $1\le i\le n$ can be obtained on the base of $A_1,A_2,...,A_k$ by the operations of intersection and complement. A recognizing system $S$ of such subsets is said to be minimal if there is no recognizing system having the power less than $|S|$; only subsets contining two elements are considered. The power of minimal $n$-recognizing systems is found and $n$- recognizing systems, having the minimal power, are built.

## Литература

1. *Эрдеш П., Спенсер Дж*. Вероятностные методы в комбинаторике. М. 1976. Мир.
2. *Варданян С. М.*- ДАН АрмССР. 1981. Т. 72. С. 141-143.
3. *Варданян С. М.* - Моделирование, оптимизация, управление. Ереван, 2001. Вып. 4. С. 74 – 77.
4. *Варданян С. М.* - Труды ИПИА НАН РА «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники». Ереван, 2005. Т. 23. С. 144 – 146.
5. *Vardanyan S.M.* In: Computer science and information teschnologies. Proceedings of the conference CSIT05, Erevan, Armenia. 2005. P. 161 – 162,
6. *Варданян С. М.* -ДНАН РА. 2007. Т. 107, N 1. С. 37 – 43. Ереван,
7. *Harary F.* Graph Theory. Addison – Welsey. Reading MA 1969.