ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 112 2012 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

Г. А. Саргсян

О разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка и построении решений в круге

(Представлено академиком В. С. Захаряном 25/V 2011)

Ключевые слова: *уравнения четвертого порядка, разрешимость задачи Дирихле, единственность задачи Дирихле*

Хорошо известно, что для гиперболических уравнений краевые задачи с данными на всей границе области, вообще говоря, являются некорректными [1,2]. Краевые задачи для гиперболических уравнений второго порядка рассмотрены в многочисленных работах. Задача Дирихле для одного гиперболического уравнения четвертого порядка впервые рассмотрена в [3]. В данной работе, в частности, установлено существование полной совокупности полиномиальных собственных функций оператора $\Delta^{-2}\dfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}$ в $W_2^4(\Omega)$, в случае круговых областей, где Δ^{-2} – оператор, обратный к двумерному бигармоническому оператору Δ^2 при нулевых условиях на границе. Работа состоит из двух частей.

В первой части изучается разрешимость задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=f(x,y), \quad \text{(I)} \qquad u\big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0, \quad \text{(II)}$$

где Ω – ограниченная область плоскости x, y с гладкой границей $\partial\Omega$, а $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает производную по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Во второй части для задачи (I), (II), когда область Ω – единичный круг с центром в начале координат, строится решение в явном виде.

О разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка. Пусть Ω – ограниченная область плоскости с гладкой границей $\partial\Omega$. В области Ω рассмотрим первую краевую задачу для уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y), \qquad (1.1) \qquad\qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.2)$$

Соответствующую однородную задачу обозначим (1.1_0), (1.2_0). Пусть имеем условия

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (1.3) \qquad\qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (1.4)$$

Известно, что условия (1.3), (1.4) эквивалентны [4].

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – производные функции из класса $C^2(\bar{\Omega})$, где $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить следующие тождества:

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \text{для всех } u, v \in C^2(\bar{\Omega}). \qquad (1.5)$$

Интегрируя тождество (1.5) по области Ω, получим формулу Грина для волнового оператора:

$$\iint\limits_{\Omega}\left(v\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}dy - u\frac{\partial v}{\partial x}dx \ \text{ для всех } u, v \in C^2(\bar{\Omega}), \qquad (1.6)$$

Наряду с краевой задачей (1.1) и (1.2) рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \qquad (\mathrm{I}) \qquad\qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (\mathrm{II})$$

Определение 1. *Функция* $u(x,y)$ *называется классическим решением краевой задачи (1.1), (1.2), если* $u \in C^4\left(\Omega\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *удовлетворяет уравнению в области* Ω *и обращается в нуль на границе* $\partial\Omega$ *вместе со своими нормальными производными.*

Определение 2. *Функция* $u(x,y)$ *называется классическим решением краевой задачи (I), (II), если* $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *удовлетворяет уравнению (I) в области* Ω *и обращается в нуль на границе* $\partial\Omega$*.*

Для дальнейшего нам нужно доказать следующую вспомогательную лемму о единственности задачи Дирихле уравнения четвертого порядка.

Лемма 1. *Если* $u(x,y)$ *является классическим решением краевой задачи (I), (II), и удовлетворяет условию*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.7}$$

где n *– внешняя нормаль границы* $\partial\Omega$ *области, то* $u\left(x,y\right)=0$.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ является решением однородной краевой задачи (I), (II) и выполняется условие (1.7). Тогда $u(x,y)$ можно представить в виде

$$u(x,y) = f(x) + g(y), \tag{1.8}$$

где $f(x) \in C^1[\alpha,\beta]$, $g(y) \in C^1[\gamma,\delta]$. Из (1.3) и (1.4) имеем $f'(x)=0$, $g'(y)=0$, $\alpha \le x \le \beta$,

$\gamma \le y \le \delta$, т.е. $f(x) \equiv c_1$, $g(y) \equiv c_2$, а из краевого условия (II) следует, что $c_1 = -c_2$, т.е.

$u(x,y) \equiv 0.$ Лемма доказана.

Теорема 1. *Однородная краевая задача Дирихле для уравнения четвертого порядка в классе классических решений из пространства* $C^4\left(\overline{\Omega}\right)$ *имеет лишь нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $u(x,y) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right)$ является решением краевой задачи (1.1_0), (1.2_0).

Подставляя в формулу Грина (1.6) вместо $v(x,y)$ выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in C^2(\Omega)$, получим

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 dxdy = \iint_{\Omega} u \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} dxdy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} dy - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx . \tag{1.9}$$

Поскольку $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению, а из краевых условий (1.4) имеем

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 dxdy = 0 ,$$

то $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ в Ω и условия (1.4) выполнены.

В силу леммы имеем $u(x,y) = 0.$ Теорема доказана.

Пусть $\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)$ – соболевское пространство функций, обобщенные производные до четвертого порядка, суммируемые вместе с квадратом в Ω. Функции вместе со своими производными первого порядка обращаются в нуль на $\partial\Omega$. Скалярное произведение в $\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)$ дается формулой

$$(u,v)_{\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)} = \iint_{\Omega} \Delta^2 uvdxdy. \tag{1.10}$$

Обозначим через $A = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ оператор, отображающий гильбертово пространство $\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ по следующему закону:

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} : \overset{0}{W}{}_2^4(\Omega) \to L_2(\Omega). \tag{1.11}$$

В гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)$ рассмотрим оператор типа С.Л.Соболева

$$B=\Delta^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial y^2}, \tag{1.12}$$

где Δ^{-2} – оператор, обратный к бигармоническому оператору Δ^2 при нулевых условиях (II) на границе. Оператор B является симметрическим и ограниченным оператором на линейном многообразии бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций. Самосопряженное расширение оператора B во всем гильбертовом пространстве обозначается той же буквой и рассматривается как отображение $L_2(\Omega)$ в гильбертово пространство $\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)$ с областью определения $D(B)=\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)\subset L_2(\Omega)$

$$B:D(B)\to \overset{0}{W}{}_2^4(\Omega). \tag{1.13}$$

Следующая теорема показывает связь оператора четвертого порядка с операторами типа С.Л.Соболева.

Теорема 2. *Операторы A и B взаимно сопряжены.*

Доказательство. Действительно, для любых $u(x,y)\in D(A)$ и $v(x,y)\in D(B)$ имеем

$$(Au,v)_{L_2(\Omega)}=(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2},v)_{L_2(\Omega)}=(u,\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial y^2})_{L_2(\Omega)}=$$

$$=(u,\Delta^2\Delta^{-2}\frac{\partial^4 \upsilon}{\partial x^2\partial y^2})_{L_2(\Omega)}=(\Delta^2 u,Bv)_{L_2(\Omega)}=(u,Bv)_{\overset{0}{W}{}_2^4(\Omega)}.$$

Это означает, что $A^*=B.$ Теорема доказана.

Построение в явном виде решений неоднородной задачи Дирихле в круге. Рассматривается следующая неоднородная задача Дирихле для уравнения четвертого порядка в случае, когда область Ω – единичный круг с центром в начале координат:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=f(x,y), \tag{2.1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega}=0. \tag{2.2}$$

Относительно правой части $f(x,y)$ уравнения (2.1) предполагаем, что она достаточно гладкая функция в замкнутой области, $\partial\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(x,y)=\int_0^x\int_0^y\int_0^\xi\int_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi+\varphi_1(x)+\varphi_2(y)+x\varphi_3(y)+y\varphi_4(x), \tag{2.3}$$

где $\varphi_1(x),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y),\ \varphi_4(x)$ – произвольные достаточно гладкие функции.

Обозначим через $\partial\Omega$ верхнюю, а через $\partial\Omega$ нижнюю полуокружности. В силу граничных условий получаем соотношения на верхней и нижней полуокружности:

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega_+}=0, \tag{2.4}$$ $$u(x,y)\big|_{\partial\Omega_-}=0, \tag{2.5}$$

$$u(-x,y)\big|_{\partial\Omega_+}=0, \tag{2.6}$$ $$u(-x,y)\big|_{\partial\Omega_-}=0, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\partial\Omega}=\\&=x\int_0^y\int_0^x\int_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta+y\int_0^x\int_0^\xi\int_0^y f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi+\\&+x\varphi_1'(x)+x\varphi_3(y)+xy\varphi_4'(x)+y\varphi_2'(y)+xy\varphi_3'(y)+y\varphi_4(x)\big|_{\partial\Omega}=0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Из условий (2.8) вытекают соотношения:

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0, \tag{2.9}$$ $$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_-}=0, \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{\partial u(-x,y)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_+}=0, \tag{2.11}$$ $$\left.\frac{\partial u(-x,y)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_-}=0. \tag{2.12}$$

Вводим для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x)=\psi_1(x),\ \ \varphi_1(-x)=\psi_2(x),\ \ \varphi_2(\sqrt{1-x^2})=\psi_3(x),\ \ \varphi_2(-\sqrt{1-x^2})=\psi_4(x),\\&\varphi_3(\sqrt{1-x^2})=\psi_5(x),\ \ \varphi_3(-\sqrt{1-x^2})=\psi_6(x),\ \ \varphi_4(x)=\psi_7(x),\ \varphi_4(-x)=\psi_8(x).\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$g_1(x)=-\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi,\ \ g_2(x)=-\int_0^x\int_0^{-\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi,$$

$$g_3(x)=-\int_0^{-x}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi,\ \ g_4(x)=-\int_0^{-x}\int_0^{-\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\xi}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi,$$

$$g_5(x)=-x^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta - x\sqrt{1-x^2}\int_0^{x}\int_0^{\xi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi,$$

$$g_6(x)=-x^2\int_0^{-\sqrt{1-x^2}}\int_0^{x}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta + x\sqrt{1-x^2}\int_0^{x}\int_0^{\xi}\int_0^{-\sqrt{1-x^2}} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi,$$

$$g_7(x)=x^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{-x}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta - x\sqrt{1-x^2}\int_0^{-x}\int_0^{\xi}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi,$$

$$g_8(x)=x^2\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{-x}\int_0^{\eta} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta + x\sqrt{1-x^2}\int_0^{-x}\int_0^{\xi}\int_0^{-\sqrt{1-x^2}} f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi. \tag{2.14}$$

После этих обозначений система функционально-дифференциальных уравнений (2.4-2.7), (2.9-2.12) относительно неизвестных функций принимает вид:

$$\psi_1(x)+\psi_3(x)+x\psi_5(x)+\sqrt{1-x^2}\psi_7(x)=g_1(x), \tag{2.15}$$

$$\psi_1(x)+\psi_4(x)+x\psi_6(x)-\sqrt{1-x^2}\psi_7(x)=g_2(x), \tag{2.16}$$

$$\psi_2(x)+\psi_3(x)-x\psi_5(x)+\sqrt{1-x^2}\psi_8(x)=g_3(x), \tag{2.17}$$

$$\psi_2(x)+\psi_4(x)-x\psi_6(x)-\sqrt{1-x^2}\psi_8(x)=g_4(x), \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered} x^2\psi_1'(x)+x^2\psi_5(x)+x^2\sqrt{1-x^2}\psi_7'(x)-(1-x^2)\psi_3'(x)- \\ -x(1-x^2)\psi_5'\left(x\right)+x\sqrt{1-x^2}\psi_7(x)=g_5(x), \end{gathered} \tag{2.19}$$

$$x^2\psi_1'(x)+x^2\psi_6(x)-x^2\sqrt{1-x^2}\psi_7'(x)-(1-x^2)\psi_4'(x)-$$
$$-x(1-x^2)\psi_6'(x)-x\sqrt{1-x^2}\psi_7(x)=g_6(x), \tag{2.20}$$

$$x^2\psi_2'(x)-x^2\psi_5(x)+x^2\sqrt{1-x^2}\psi_8'(x)-(1-x^2)\psi_3'(x)+$$
$$+x(1-x^2)\psi_5'(x)+x\sqrt{1-x^2}\psi_8(x)=g_7(x), \tag{2.21}$$

$$x^2\psi_2'(x)-x^2\psi_6(x)-x^2\sqrt{1-x^2}\psi_8'(x)-(1-x^2)\psi_4'(x)+$$
$$+x(1-x^2)\psi_6'(x)-x\sqrt{1-x^2}\psi_8(x)=g_8(x). \tag{2.22}$$

Просуммировав соответственно равенства (2.15)-(2.18) и (2.19)-(2.22), получим систему уравнений

$$[\psi_1(x)+\psi_2(x)]+[\psi_3(x)+\psi_4(x)]=\frac{1}{2}[g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+g_4(x)], \tag{2.23}$$

$$x^2[\psi_1(x)+\psi_2(x)]'-(1-x^2)[\psi_3(x)+\psi_4(x)]'=$$
$$=\frac{1}{2}[g_5(x)+g_6(x)+g_7(x)+g_8(x)]. \tag{2.24}$$

Решая систему (2.23), (2.24), имеем

$$\psi_1(x)+\psi_2(x)=\frac{1}{2}\left[g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+g_4(x)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)]\}dt-c_1, \tag{2.25}$$

$$\psi_3(x)+\psi_4(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-$$
$$-[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)]\}dt+c_1. \tag{2.26}$$

Просуммировав соответственно равенства (2.15), (2.16) и (2.19), (2.20), получим систему уравнений:

$$2\psi_1(x)+[\psi_3(x)+\psi_4(x)]+x[\psi_5(x)+\psi_6(x)]=g_1(x)+g_2(x), \tag{2.27}$$

$$2x^2\psi_1'(x)+x^2[\psi_5(x)+\psi_6(x)]-(1-x^2)[\psi_3(x)+\psi_4(x)]'-$$
$$-x(1-x^2)[\psi_5(x)+\psi_6(x)]'=g_5(x)+g_6(x). \quad (2.28)$$

Исключая из этой системы $\psi_1(x)$ и пользуясь (2.26), получим дифференциальное уравнение относительно $\psi_5(x)+\psi_6(x),$ решение которого имеет вид

$$\psi_5(x)+\psi_6(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^x\left\{t\left[g_1'(t)+g_2'(t)-g_3'(t)-g_4'(t)\right]+\frac{g_7(t)+g_8(t)-g_5(t)-g_6(t)}{t}\right\}dt+c_2. \quad (2.29)$$

Из (2.25), (2.27) и (2.29) имеем

$$\psi_1(x)=-\frac{x}{4}\int_0^x\{t[g_1'(t)+g_2'(t)-g_3'(t)-g_4'(t)]+$$
$$+\frac{g_7(t)+g_8(t)-g_5(t)-g_6(t)}{t}\}dt-\frac{c_2x}{2}+\frac{1}{2}\left[g_1(x)+g_2(x)\right]- \quad (2.30)$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-\left[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)\right]\}dt-\frac{c_1}{2}.$$

Из равенства (2.25) имеем

$$\psi_2(x)=\frac{x}{4}\int_0^x\{t[g_1'(t)+g_2'(t)-g_3'(t)-g_4'(t)]+\frac{g_7(t)+g_8(t)-g_5(t)-g_6(t)}{t}\}dt-$$
$$+\frac{c_2x}{2}+\frac{1}{2}\left[g_3(x)+g_4(x)\right]- \quad (2.31)$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)]\}dt-\frac{c_1}{2}.$$

Суммируя соответственно равенства (2.16), (2.18) и (2.20), (2.21), получим

$$[\psi_1(x)+\psi_2(x)]+2\psi_4(x)-\sqrt{1-x^2}[\psi_7(x)+\psi_8(x)]=g_2(x)+g_4(x), \quad (2.32)$$

$$x^2[\psi_1(x)+\psi_2(x)]'-x^2\sqrt{1-x^2}[\psi_7(x)+\psi_8(x)]'-$$
$$-x\sqrt{1-x^2}[\psi_7(x)+\psi_8(x)]-2(1-x^2)\psi_4'(x)=g_6(x)+g_8(x). \quad (2.33)$$

Исключая из этой системы $\psi_4(x)$ и пользуясь (2.25), получим дифференциальное уравнение относительно $\psi_7(x)+\psi_8(x)$, решение которого имеет вид

$$\psi_7(x)+\psi_8(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{\sqrt{1-t^2}[g_1'(t)-g_2'(t)+g_3'(t)-g_4'(t)]+ \\ +\frac{g_5(t)-g_6(t)+g_7(t)-g_8(t)}{\sqrt{1-t^2}}\}dt+c_3. \tag{2.34}$$

Из (2.25), (2.26),(2.32) и (2.34) имеем

$$\psi_4(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}\int_0^x\{\sqrt{1-t^2}[g_1'(t)-g_2'(t)+g_3'(t)-g_4'(t)]+ \\ +\frac{g_5(t)-g_6(t)+g_7(t)-g_8(t)}{\sqrt{1-t^2}}\}dt+\frac{c_3\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{g_2(x)+g_4(x)-g_1(x)-g_3(x)}{4}+ \\ +\frac{1}{4}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)]\}dt+\frac{c_1}{2}, \tag{2.35}$$

$$\psi_3(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4}\int_0^x\{\sqrt{1-t^2}[g_1'(t)-g_2'(t)+g_3'(t)-g_4'(t)]+ \\ +\frac{g_5(t)-g_6(t)+g_7(t)-g_8(t)}{\sqrt{1-t^2}}\}dt-\frac{g_2(x)+g_4(x)-g_1(x)-g_3(x)}{4}-\frac{c_3\sqrt{1-x^2}}{2}+ \\ +\frac{1}{4}\int_0^x\{t^2[g_1'(t)+g_2'(t)+g_3'(t)+g_4'(t)]-[g_5(t)+g_6(t)+g_7(t)+g_8(t)]\}dt+\frac{c_1}{2}. \tag{2.36}$$

Из равенства (2.35) и (2.36) имеем

$$\psi_3(x)-\psi_4(x)=\frac{[g_1(x)-g_2(x)+g_3(x)-g_4(x)]}{2}-c_3\sqrt{1-x^2}- \\ -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int_0^x\{\sqrt{1-t^2}[g_1'(t)-g_2'(t)+g_3'(t)-g_4'(t)]+\frac{[g_5(t)-g_6(t)+g_7(t)-g_8(t)]}{\sqrt{1-t^2}}\}dt. \tag{2.37}$$

Вычитая соответственно равенства (2.15), (2.16) и (2.19), (2.20), получим систему уравнений:

$$\psi_7(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\{[g_1(x)-g_2(x)]-[\psi_3(x)-\psi_4(x)]-x[\psi_5(x)-\psi_6(x)]\}, \tag{2.38}$$

$$x^2[\psi_5(x)-\psi_6(x)]+2x^2\sqrt{1-x^2}\psi_7'(x)-(1-x^2)[\psi_3(x)-\psi_4(x)]'-$$
$$-x(1-x^2)[\psi_5(x)-\psi_6(x)]'+2x\sqrt{1-x^2}\psi_7(x)=g_5(x)-g_6(x). \qquad (2.39)$$

Исключая из этой системы $\psi_7(x)$, получим дифференциальное уравнение относительно $\psi_5(x)-\psi_6(x)$, решение которого имеет вид

$$\psi_5(x)-\psi_6(x)=x[g_1(x)-g_2(x)]-x[\psi_3(x)-\psi_4(x)]-$$
$$-\sqrt{1-x^2}\int\limits_0^x\left\{\frac{\sqrt{1-t^2}\left[\psi_3(t)-\psi_4(t)\right]'}{t}+\frac{\left[g_5(t)-g_6(t)\right]}{t\sqrt{1-t^2}}\right\}dt+c_4. \qquad (2.40)$$

Из (2.29) и (2.40) находим

$$\psi_5(x)=\frac{x[g_1(x)-g_2(x)]}{2}-\frac{x[\psi_3(x)-\psi_4(x)]}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^x\{t[g_1'(t)+g_2'(t)-g_3'(t)-g_4'(t)]+\frac{g_7(t)+g_8(t)-g_5(t)-g_6(t)}{t}\}dt- \qquad (2.41)$$
$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int\limits_0^x\left\{\frac{\sqrt{1-t^2}\left[\psi_3(t)-\psi_4(t)\right]'}{t}+\frac{g_5(t)-g_6(t)}{t\sqrt{1-t^2}}\right\}dt+\frac{c_2}{2}+\frac{c_4}{2},$$

$$\psi_6(x)=-\frac{x[g_1(x)-g_2(x)]}{2}+\frac{x[\psi_3(x)-\psi_4(x)]}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^x\{t[g_1'(t)+g_2'(t)-g_3'(t)-g_4'(t)]+\frac{g_7(t)+g_8(t)-g_5(t)-g_6(t)}{t}\}dt+ \qquad (2.42)$$
$$+\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int\limits_0^x\left\{\frac{\sqrt{1-t^2}\left[\psi_3(t)-\psi_4(t)\right]'}{t}+\frac{g_5(t)-g_6(t)}{t\sqrt{1-t^2}}\right\}dt+\frac{c_2}{2}-\frac{c_4}{2}.$$

Наконец, из равенства (2.37).(2.38) и (2.34) имеем:

$$\psi_7(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}\left[g_1(x)-g_2(x)\right]}{2}-\frac{\sqrt{1-x^2}\left[\psi_3(x)-\psi_4(x)\right]}{2}+$$
$$+\frac{x}{2}\int\limits_0^x\left\{\frac{\sqrt{1-t^2}\left[\psi_3(t)-\psi_4(t)\right]'}{t}+\frac{\left[g_5(t)-g_6(t)\right]}{t\sqrt{1-t^2}}\right\}dt-\frac{c_4x}{2\sqrt{1-x^2}}, \qquad (2.43)$$

$$\psi_8(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\{\sqrt{1-t^2}[g_1'(t)-g_2'(t)+g_3'(t)-g_4'(t)]+\frac{g_5(t)-g_6(t)+g_7(t)-g_8(t)}{\sqrt{1-t^2}}\}dt-$$

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}\left[g_1(x)-g_2(x)\right]}{2}+\frac{\sqrt{1-x^2}\left[\psi_3(x)-\psi_4(x)\right]}{2}+c_3-$$

$$-\frac{x}{2}\int_0^x\left\{\frac{\sqrt{1-t^2}\left[\psi_3(t)-\psi_4(t)\right]'}{t}+\frac{\left[g_5(t)-g_6(t)\right]}{t\sqrt{1-t^2}}\right\}dt+\frac{c_4x}{2\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.44}$$

Таким образом, найдены в явном виде неизвестные функции $\psi_k(x)\ (k=1,2,\dots,8)$, удовлетворяющие системе (2.15)-(2.22) функционально-дифференциальных уравнений.

В силу обозначений (2.13) неизвестные функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(y),\ \varphi_3(y),\ \varphi_4(y)$ выражаются через найденные функции $\psi_k(x)$ согласно формулам

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\psi_1(x);\ 0\le x\le 1,\\ \psi_2(x);\ -1\le x\le 0,\end{cases}\qquad \varphi_2(y)=\begin{cases}\psi_3(\sqrt{1-y^2});\ 0\le y\le 1,\\ \psi_4(\sqrt{1-y^2});\ -1\le y\le 0,\end{cases} \tag{2.45}$$

$$\varphi_3(y)=\begin{cases}\psi_5(\sqrt{1-y^2});\ 0\le y\le 1,\\ \psi_6(\sqrt{1-y^2});\ -1\le y\le 0,\end{cases}\qquad \varphi_4(x)=\begin{cases}\psi_7(x);\ 0\le x\le 1,\\ \psi_8(x);\ -1\le x\le 0.\end{cases}$$

Требуя гладкости функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x),\varphi_4(x)$ в точке нуль и имея условия (2.45), единственность рассматриваемой задачи и краевые условия (2.2), легко проверить, что постоянные c_1,c_2,c_3,c_4 равны нулю, т.е. в окончательных решениях задачи (2.1)- (2.2) отсутствуют слагаемые, содержащие эти постоянные.

В силу обозначений (2.13-2.14) неизвестных функций окончательно находим в явном виде решение задачи Дирихле в случае единичного круга

$$u(x,y)=\begin{cases}\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi+\psi_1(x)+\psi_3(\sqrt{1-y^2})+\\ +x\psi_5(\sqrt{1-y^2})+y\psi_7(x),\ 0\le x\le 1; 0\le y\le 1,\\ \int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi+\psi_2(x)+\psi_3(\sqrt{1-y^2})+\\ +x\psi_5(\sqrt{1-y^2})+y\psi_8(x),\ -1\le x\le 0; 0\le y\le 1,\\ \int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi+\psi_2(x)+\psi_4(\sqrt{1-y^2})+\\ +x\psi_6(\sqrt{1-y^2})+y\psi_8(x),\ -1\le x\le 0; -1\le y\le 0,\\ \int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\eta d\xi+\psi_1(x)+\psi_4(\sqrt{1-y^2})+\\ +x\psi_6(\sqrt{1-y^2})+y\psi_7(x)\quad 0\le x\le 1; -1\le y\le 0.\end{cases}\tag{2.46}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если* $f(x,y)$ *достаточно гладкая функция в замкнутой области* $\partial\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega,$ *то существует решение задачи Дирихле (2.1)- (2.2) в области* Ω *и оно задается формулам (2.46).*

В заключение выражаю глубокую благодарность И. Г. Хачатряну за обсуждение полученных результатов.

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Г. А. Саргсян

О разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка и построении решений в круге

Изучена разрешимость задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка. Доказана теорема о связи оператора четвертого порядка с оператором типа Соболева. В явном виде построено решение задачи Дирихле в единичном круге.

Գ.Ա. Սարգսյան

Չորրորդ կարգի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության և շրջանում լուծումների կառուցման մասին

Ուսումնասիրվում է Դիրիխլեի խնդիրը չորրորդ կարգի հավասարման համար: Ապացուցված է թեորեմ չորրորդ կարգի օպերատորի և Սոբոլևի տիպի օպերատորի սերտ կապի վերաբերյալ: Բացահայտ տեսքով կառուցվում է Դիրիխլեի խնդրի լուծումը միավոր շրջանում:

G. A. Sargsyan

Solvability of the Dirichlet Problem for the Fourth Degree Equation and Consruction of the Solutions in a Disc

The Dirichlet problem for the fourth degree equation is considered. A theorem about close relationship between the fourth degree operator and Sobolev type operator is proved. The exact solution of Dirichlet problem in a unit disc is constructed.

Литература

1. *Соболев С.Л.* - ДАН СССР. 1956. Т. 109. N4.
2. *Александрян Р.А*.- ТМО. 1960. Т.9. С. 455-505.
3. *Вирабян Г.В.* - ДАН СССР. 1960. Т. 152. N5.
4. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1988.