ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 111 2011 № 4

МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. А. Саркисян

Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок

(Представлено чл.-кор. НАН РА С. О. Саркисяном 11/II 2011)

Ключевые слова: *микрополярно-упругий, балка, изгиб, динамика, модель*

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из основных моделей сред с внутренней структурой. Эффекты микрополярности материала особенно существенны в тонких телах (балки, пластинки, оболочки). Современные достижения в области теории микрополярных тонких балок, пластин и оболочек освещены в работах [1-3]. Отметим, что проблема построения моделей микрополярных тонких балок, пластин и оболочек поставлена С. А. Амбарцумяном [4].

В работах С. О. Саркисяна [5-7] развит метод гипотез построения моделей микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек, который опирается на асимптотический анализ изучения свойств решений плоских и пространственных граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях. В указанных моделях микрополярно-упругих тонких балок, пластин и оболочек полностью учитываются поперечно сдвиговые и родственные им деформации.

В данной работе развивается метод гипотез [5-7], на основе которого построена модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. Далее, изучается задача о распространении плоской волны (в точной постановке) в микрополярно-упругой полосе. В длинноволновом приближении показывается совпадение характеристического уравнения распространения волны с аналогичным уравнением, полученным на основе построенной прикладной модели микрополярной балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропный микрополярно-упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины, равной $2h_1 = 1$. Координатную плоскость x_1x_3 разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось x_3 направим по высоте, а ось x_1 – по длине параллелепипеда, который делит высоту $2h$ пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_2 осуществлено плоское напряженное состояние.

Основные уравнения плоской динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (или иначе, по общему континууму Коссера) имеют вид [8]:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}-(\sigma_{13}-\sigma_{31})=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2}; \tag{1.1}$$

физико-геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{33}),\quad \gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31},$$

$$\gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=\frac{1}{E}(\sigma_{33}-\nu\sigma_{11}),\quad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13}, \tag{1.2}$$

$$\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}=\frac{1}{B}\mu_{32},\quad \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}=\frac{1}{B}\mu_{12}.$$

Здесь, $\sigma_{11},\sigma_{13},\sigma_{31},\sigma_{33}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения, $\gamma_{11},\gamma_{33},\gamma_{13},\gamma_{31}$ – деформации; χ_{32},χ_{12} – изгиб-кручение; V_1,V_3 – линейные перемещения, ω_2 – независимый поворот точек прямоугольника $(0\le x_1\le a,\ -h\le x_3\le h)$ вокруг оси x_2; $E,\ \mu=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)},\ \alpha,\ B$ – упругие константы материала микрополярного тела.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия:

$$\sigma_{31}=\tilde{p}_1,\quad \sigma_{33}=\pm\tilde{p}_3,\quad \mu_{32}=\pm\tilde{m}_2. \tag{1.3}$$

На кромках $(x_1=0, x_1=a)$ прямоугольника примем нижеследующие основные варианты граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости:

$$1)\ \sigma_{11}=p_1^*(x_3,t),\ \sigma_{13}=p_3^*(x_3,t),\ \mu_{12}=m_2^*(x_3,t), \tag{1.4}$$

$$2)\ \sigma_{11}=p_1^*(x_3,t),\ V_3=V_3^*(x_3,t),\ \mu_{12}=m_2^*(x_3,t), \tag{1.5}$$

$$3)\ V_1=V_1^*(x_3,t),\ V_3=V_3^*(x_3,t),\ \omega_2=\omega_2^*(x_3,t). \tag{1.6}$$

При помощи начальных условий, при $t=0$, задаются значения перемещений V_1,V_3, независимого поворота ω_2 и компонентов линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$V_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_3),\qquad V_3\big|_{t=0}=f_3(x_1,x_3),\qquad \omega_2\big|_{t=0}=\varphi_2(x_1,x_3),$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=F_1(x_1,x_3),\quad \frac{\partial V_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=F_3(x_1,x_3),\quad \frac{\partial \omega_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Phi_2(x_1,x_3),\tag{1.7}$$

где $f_1,f_3,F_1,F_3,\varphi_2,\Phi_2$ – заданные функции в области указанного прямоугольника.

2. Модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок. Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых и начально-краевых задач (1.1)-(1.7) в тонкой прямоугольной области позволяют в основу построения прикладной одномерной модели микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, как в случае статики, ставить следующие достаточно общие гипотезы, которые сформулированы в работах С. О. Саркисяна [5-7]:

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений V_1,V_3 и свободного поворота ω_2 по толщине прямоугольника:

$$V_3=w(x_1,t),\quad V_1=x_3\psi_1(x_1,t),\ \omega_2=\Omega_2(x_1,t)\tag{2.1}$$

где w – прогиб балки; Ω_2 – угол свободного поворота, а ψ_1 – полный угол поворота нормального элемента.

Можно убедиться, что для компонент вектора перемещения эта гипотеза представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих балок [9,10], поэтому, гипотезу (2.1) полностью, как в работах [5-7], назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных балок.

Кинематическую гипотезу (2.1) дополним следующей статической гипотезой:

б) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}(x_1,t).\tag{2.2}$$

После определения указанных величин, значение σ_{31} окончательно определим как сумму значения (2.2) и результата интегрирования первого уравнения движения из (1.1), для которого будем требовать, чтобы усредненная по высоте прямоугольника величина была равна нулю;

в) в обобщенном законе Гука (1.2) будем пренебрегать силовым напряжением σ_{33} относительно силового напряжения σ_{11}.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и поворота (2.1), а также предположениями б) и в) для деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений из (1.1)-(1.3) получим следующие формулы:

$$\gamma_{11}=x_3K_{11}(x_1,t),\ \gamma_{31}=\Gamma_{31}(x_1,t),\ \gamma_{13}=\Gamma_{13}(x_1,t),\ \gamma_{33}=0,\ \ \chi_{12}=\kappa_{12}(x_1,t),\ \ \chi_{32}=0,$$

$$K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\ \ \Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2,\ \ \ \kappa_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{11}=x_3\hat{\sigma}_{11}(x_1,t),\ \hat{\sigma}_{11}=EK_{11},\ \sigma_{13}=(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31},$$

$$\sigma_{31}^0=(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13},\ \ \sigma_{31}=\sigma_{31}^0(x_1,t)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{11}(x_1,t)}{\partial x_1}-\rho\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right), \qquad (2.3)$$

$$\sigma_{33}=-x_3\left(\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right),\ \sigma_{33}=x_3\frac{\widetilde{p}_3}{h},$$

$$\mu_{12}=\mu_{12}(x_1,t)=B\kappa_{12},\ \ \mu_{32}=-x_3\left[\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+(\sigma_{31}-\sigma_{13})-J\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}\right],\ \mu_{32}=x_3\frac{\widetilde{m}_2}{h}.$$

С целью приведения двумерной задачи (1.1)-(1.7) к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгибов-кручений, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений, в модели микрополярных балок вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики – усилия (N_{13},N_{31}) и моменты (M_{11},L_{12}) [5].

В итоге основная система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\widetilde{p}_3,\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=2h\widetilde{p}_1,$$
$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+N_{31}-N_{13}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}-2\widetilde{m}_2; \qquad (2.4)$$

соотношения упругости

$$N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}],\ \ N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}],$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}K_{11},\qquad L_{12}=2Bh\kappa_{12}; \qquad (2.5)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Omega_2,\quad \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\quad K_{11}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ \ \kappa_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}. \qquad (2.6)$$

Система динамических уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок (2.4)-(2.6) представляет собой систему уравнений шестого порядка. Это система из 11-ти уравнений относительно 11-ти неизвестных функций: $w,\psi_1,\Omega_2,\Gamma_{13},\Gamma_{31},K_{11},\ \kappa_{12},N_{13},N_{31},M_{11},L_{12}$.

«Смягченные» граничные условия на торце балки (например, на $x_1 = 0$) будут выражаться так:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \psi_1 = \psi_1^*,\; N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,\; L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \Omega_2 = \Omega_2^*. \tag{2.7}$$

Начальные условия следует ставить для перемещения w, поворотов ψ_1, Ω_2, а также для линейных и угловых скоростей: $\frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_2}{\partial t}$.

В модели (2.4)-(2.6) микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если в модели микрополярных балок (2.4)-(2.7) условно принимать $\alpha = 0$, в итоге будет отделяться модель классической теории упругих тонких балок Тимошенко [8,9] (с незначительным отличием, связанным со статической гипотезой б)).

3. Распространение волн в микрополярно-упругой полосе. Объектом исследования является полоса $\left(S\{x_1, x_3\}:\; -\infty < x_1 < \infty,\; |x_3| \le h\right)$ упругой среды толщиной $2h$, с ограничивающими плоскостями $x_3 = \pm h$, свободными от силовых и моментных напряжений:

$$\sigma_{31} = 0,\; \sigma_{33} = 0,\;\; \mu_{32} = 0. \tag{3.1}$$

Будем исходить из системы основных уравнений (1.1),(1.2) – плоской задачи микрополярной теории упругости со свободным вращением.

Указанную систему уравнений можем привести к следующему виду:

$$\begin{gathered}
\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + (\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} + \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \mu - \alpha\right)\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1 \partial x_3} - 2\alpha\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\\
(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_1^2} + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} + \left(\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} + \mu - \alpha\right)\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\alpha\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\\
B\left(\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x_3^2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right) - 4\alpha\omega_2 = J\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Исследуем задачу о распространении плоской волны в направлении оси x_1. Если зададим перемещения следующим образом:

$$V_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}, \qquad V_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \tag{3.3}$$

то систему уравнений (3.2) динамической плоской задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений можем привести к более удобному виду (для построения точного решения поставленной задачи):

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,\;\; \left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi - \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\omega_2 = 0,\;\; \left(\Delta - \nu_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\omega_2 + \frac{2\alpha}{B}\Delta\Psi = 0, \tag{3.4}$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\rho(\lambda+2\mu)}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{B}{J}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{4\alpha}{B}}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{3.5}$$

к которому следует присоединить граничные условия (3.1).

Отметим, что из (3.4) можем получить отдельные уравнения относительно трех функций Φ, Ψ, ω_2:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \qquad \left[\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\Delta\right]\Psi = 0,$$
$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - v_0^2 - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) + \eta_0^2\Delta\right]\omega_2 = 0, \tag{3.6}$$

где принято следующее обозначение:

$$\eta_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{B(\mu+\alpha)}}. \tag{3.7}$$

Решение системы уравнений (3.6) будем искать по методу В. Новацкого в виде гармонических волн [8]:

$$\Phi = \Phi^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \qquad \Psi = \Psi^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \qquad \omega_2 = \omega_2^*(x_3)e^{i(\xi x_1 - pt)}, \tag{3.8}$$

где ξ – волновое число, p – частота колебаний.

Подставляя (3.8) в (3.6), приходим к решению системы отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\Phi^*(x_3)$, $\Psi^*(x_3)$, $\omega_2^*(x_3)$:

$$\frac{d^2\Phi^*}{dx_3^2} - k^2\Phi^* = 0, \qquad \text{где} \qquad k = \sqrt{\xi^2 - \frac{p^2}{c_1^2}}, \tag{3.9}$$

$$\frac{d^4\Psi^*}{dx_3^4} - \left[2\xi^2 + v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2\Psi^*}{dx_3^2} + \left[\xi^4 + \xi^2\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right) - \frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]\Psi^* = 0, \tag{3.10}$$

$$\frac{d^4\omega_2^*}{dx_3^4} - \left[2\xi^2 + v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right]\frac{d^2\omega_2^*}{dx_3^2} + \left[\xi^4 + \xi^2\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right) - \frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)\right]\omega_2^* = 0. \tag{3.11}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (3.9)-(3.11) для обратно-симметричной относительно координаты x_3 задачи (т.е. для задачи изгиба) можем представить в следующем виде:

$$\Phi^*(x_3) = A_1 sh(kx_3), \ \Psi^*(x_3) = A_2 ch(k_1x_3) + B_2 ch(k_2x_3), \omega_2^*(x_3) = A_3 ch(k_1x_3) + B_3 ch(k_2x_3), \tag{3.12}$$

где

$$k_{1,2}^2 = \xi^2 + \frac{1}{2}\left[v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2} \pm \sqrt{\left(v_0^2 - \eta_0^2 - \frac{p^2}{c_2^2} - \frac{p^2}{c_4^2}\right)^2 + 4\frac{p^2}{c_2^2}\left(v_0^2 - \frac{p^2}{c_4^2}\right)}\right], \tag{3.13}$$

A_1, A_2, B_2, A_3, B_3 – произвольные постоянные.

Если при помощи полученных решений для функций Ψ и ω_2 удовлетворим двум последним уравнениям из системы (3.4), то получим

$$A_3 = -\widetilde{T}_1 A_2, \quad B_3 = -\widetilde{T}_2 B_2, \tag{3.14}$$

где

$$\widetilde{T}_1 = \frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\left(\xi^2 - k_1^2 - \frac{p^2}{c_2^2}\right), \quad \widetilde{T}_2 = \frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\left(\xi^2 - k_2^2 - \frac{p^2}{c_2^2}\right). \tag{3.15}$$

Теперь, подставив полученный результат (3.12) в (3.8), а затем и в (3.3), окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left[i\xi A_1 sh(kx_3) + A_2 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)\right] e^{i(\xi x_1 - pt)}, \\ V_3 &= \left[A_1 k sh(kx_3) - i\xi\left(A_2 ch(k_1 x_3) + B_2 ch(k_2 x_3)\right)\right] e^{i(\xi x_1 - pt)}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Имея в виду (3.16), из (1.2) для величин σ_{31}, σ_{33}, μ_{32} получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{31} = \Big[2i\mu\xi k A_1 ch(kx_3) &+ \left(\left\{(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2\right\}A_2 - 2\alpha A_3\right) ch(k_1 x_3) + \\ &+ \left(\left\{(\mu+\alpha)k_2^2 + (\mu-\alpha)\xi^2\right\}B_2 - 2\alpha B_3\right) ch(k_2 x_3)\Big] e^{i(\xi x_1 - pt)}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \left[A_1\left(2\mu\xi^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{p^2}{c_1^2}\right) sh(kx_3) - 2i\mu\xi\left(A_2 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)\right)\right] e^{i(\xi x_1 - pt)} \tag{3.17}$$

$$\mu_{32} = B\left[A_3 k_1 sh(k_1 x_3) + B_2 k_2 sh(k_2 x_3)\right] e^{i(\xi x_1 - pt)}.$$

Подставляя выражения из (3.17) в граничные условия (3.1), после некоторых преобразований, имея в виду (3.14), получим однородную линейную систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &A_1 2i\mu\xi k ch(kh) + A_2 \Big\{\left[(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2 + 2\alpha\widetilde{T}_1\right] ch(k_1 h) - \\ &\qquad - \left[(\mu+\alpha)k_1^2 + (\mu-\alpha)\xi^2 + 2\alpha\widetilde{T}_2\right] \frac{\widetilde{T}_1 k_1 sh(k_1 h)}{\widetilde{T}_2 k_2 sh(k_2 h)} ch(k_2 h)\Big\} = 0, \\ &A_1\left(2\mu\xi^2 - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{p^2}{c_1^2}\right) sh(kh) - A_2 2\mu i\xi\left(k_1 sh(k_1 h) - \frac{\widetilde{T}_1 k_1}{\widetilde{T}_2} sh(k_1 h)\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Система этих уравнений будет иметь ненулевое решение, если ее определитель будет равен нулю. В итоге приходим к следующему характеристическому (трансцендентному) уравнению:

$$a'\left(\frac{\widetilde{T}_2 k_2}{th(k_1 h)} - \frac{\widetilde{T}_1 k_1}{th(k_2 h)}\right) th(kh) = \frac{4\mu^2\xi^2 k_1 k_2 k\left(\widetilde{T}_2 - \widetilde{T}_1\right)}{\dfrac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}k^2 - \dfrac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\xi^2}, \tag{3.19}$$

где $a' = \mu\left(k_1^2 + \xi^2\right) + \alpha\left(k_1^2 - \xi^2\right) + 2\alpha\widetilde{T}_1 = \mu\left(k_2^2 + \xi^2\right) + \alpha\left(k_2^2 - \xi^2\right) + 2\alpha\widetilde{T}_2.$ (3.20)

Если длина волны по сравнению с толщиной полосы велика, то значения $kh, k_1 h, k_2 h$ можно отнести к весьма малым и в уравнении (3.19) можно заменить гиперболические тангенсы их аргументами [8]. Таким образом, проведя некоторые преобразования, для задачи изгиба микрополярной полосы в случае длинных волн приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\left(\xi^2 - \frac{J}{B}p^2\right)\left(\xi^2 - \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\rho p^2\right) - \frac{1}{B}\rho p^2 = 0. \tag{3.21}$$

Отметим, что в работе [11] построена упрощенная модель микриполярно-упругой балки со свободным вращением (в которой фактически не учитываются влияния изгибающего момента M_{11} от силового напряжения σ_{11}). Показано [12], что если распространение волны в бесконечной балке изучать по модели [11], то полученное характеристическое уравнение будет совпадать с уравнением длинных волн (3.21).

Теперь, если гиперболические тангенсы заменить первыми двумя членами из соответствующего степенного ряда [13] и проводить некоторые выкладки, на основе (3.19) приходим к характеристическому уравнению

$$\begin{gathered}\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\xi^4 - \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{J}{B}p^2\xi^2 - \rho p^2\xi^2 + \frac{J\rho}{B}p^4 - \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{1}{B}\rho p^2 - \frac{h^2}{3}\left(\rho p^2 - E\xi^2\right)\times \\ \times\left[\xi^4 + \xi^2\left(\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{1}{B} - \frac{\rho}{\mu+\alpha}p^2 - \frac{J}{B}p^2\right) - \frac{\rho}{\mu+\alpha}p^2\left(\frac{4\alpha}{B} - \frac{J}{B}p^2\right)\right] = 0.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Рассмотрим аналогичную задачу о распространении волны на основе уточненной модели (2.4)-(2.6) микрополярной балки (по сравнению с упрощенной моделью [11]), при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, а также влияние усредненного момента M_{11}. Для изучения процесса распространения волны изгиба вдоль средней линии балки представим решение указанной задачи в виде

$$w = \tilde{A}e^{i(\xi x_1 - pt)}, \qquad \Omega_3 = \tilde{B}e^{i(\xi x_1 - pt)}, \qquad \psi_1 = \tilde{C}e^{i(\xi x_1 - pt)}. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в систему уравнений (2.4)-(2.6) и требуя ненулевое решение, в результате получим то же характеристическое уравнение (3.22), которое получено на основе точного решения плоской задачи микрполярной теории упругости со свободным вращением в случае длинных волн.

Таким образом, и при точном решении динамической задачи о распространении плоской волны в тонкой микрополярной бесконечной полосе (в случае длинных волн), и при решении той же задачи на основе прикладных-одномерных моделей тонких балок приходим к одинаковым характеристическим уравнениям и можем заключить, что применение асимптотического подхода интегрирования системы уравнений плоской задачи микрополярной теории упругости и основанный на этом подходе метода гипотез [5-7] адекватным образом заменяет двумерные задачи одномерными (в зависимости от точности) моделями.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

А. А. Саркисян

Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких балок

На основе метода гипотез, имеющий асимптотическое подтверждение, построена модель динамического изгиба микрополярно-упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.

В точной постановке плоской задачи для полосы микрополярной теории упругости со свободным вращением и на основе построенной одномерной прикладной модели микрополярной балки изучается задача о распространении волны. В случае длинных волн показывается совпадение характеристического уравнения распространения волны по указанным обеим моделям.

Ա. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի դինամիկ ծռման մաթեմատիկական մոդելը

Վարկածների մեթոդի հիման վրա, որն ունի ասիմպտոտիկ հիմնավորում, կառուցվում է ազատ պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական ձողերի դինամիկ ծռման մոդելը:

Ազատ պտույտներով շերտի դեպքում միկրոպոլյար առաձգականության տեսության դրվածքով և կառուցված ազատ պտույտներով միկրոպոլյար ձողերի միաչափ կիրառական մոդելի հիման վրա ուսումնասիրվում է ալիքի տարածման խնդիրը: Երկար ալիքների դեպքում ցույց է տրվում, որ ալիքի տարածման բնութագրիչ հավասարումները նշված երկու մոդելների դեպքում համընկնում են:

A. H. Sargsyan

Mathematical Model of The Dynamic Bend of Micropolar Elastic Thin Bars

On the basis of the hypotheses method, having asymptotic confirmation, the model of dynamic bend of micropolar-elastic thin bars with independent fields of transitions and rotations is constructed.

In exact statement of the flat problem for a strip of the micropolar theory of elasticity with free rotation and on the basis of the constructed one-dimensional applied model of a micropolar bar the problem about wave distribution is studied. In case of long waves it is shown the coincidence of the characteristic equation of the wave distribution on both specified models.

Литература

1. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A.* - Arch. Mech (Special Issue). 2009. DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.

2. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М. Изд-во МГУ. 1999. 328 с.

3. *Саркисян С. О.* - Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N2. С. 84-95.

4. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.

5. *Саркисян С. О.* - Доклады НАН Армении. 2011. Т. 111. N2.
6. *Саркисян С. О.* - Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 1.
7. *Саркисян С. О.* - Доклады АН России. 2011. Т. 436. N 2. С. 195-198.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир. 1975. 862 с.
9. *Пелех Б. Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев. Наукова думка. 1977. 183 с.
10. *Перцев А.К., Платонов Э. Г.* Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Судостроение. 1987. 316 с.
11. *Саркисян С.О., Атоян А.А.* - Доклады НАН Армении. 2004. Т. 104. N4. С.287-294.
12. *Атоян А. А., Саркисян С. О.* - Прикладная механика и технологии машиностроения. Сб. науч. тр./ Под редакцией В. И. Ерофеева, С. И. Смирнова, Г. К. Сорокина. Н/Новгород. Интелсервис. 2004. Вып. 1(7). С. 67-74.
13. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М. Наука. 1984. 228 с.