

МЕХАНИКА

УДК 539.3:624.04

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты (часть III)

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 2/XI 2010)

Ключевые слова: *собственный вес, частота, устойчивость, дискретная система, оптимальное управление через граничные условия*

Объект исследования тот же, что и в первых двух частях [1,2]. В настоящей статье рассмотрены вопросы устойчивости его отдельных частей и влияние собственного веса на собственные частоты. Отдельно рассматривается также задача оптимального управления движением колонны, когда оно осуществляется через граничные условия.

1. Рассмотрим задачу устойчивости многослойного основания. По предположению [1,2] начальное невозмущенное состояние принималось для него как сдвиговое. Следовательно, единственным начальным перерезывающим усилием будет Sh в предположении, что на внешних плоскостях действует сдвигающее напряжение S . Одномерными уравнениями возмущенного состояния будут [3]:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - Sh \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ D \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + Sh \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Приведенные здесь коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
C &= B_{11}^{(1)}(k+1)h_1 + B_{11}^{(2)}kh_2, \quad \rho = \rho_1(k+1)h_1 + \rho_2kh_2 \\
D &= \frac{2}{3} \left[B_{11}^{(1)}X_1 + B_{11}^{(2)}X_2 \right], \quad X_1 = \sum_{m=1}^{k+1} Z_1 - \sum_{m=1}^k Z_2 \\
X_2 &= \sum_{m=1}^k (Z_2 - Z_1), \quad Z_1 = \left[(2m-1)\frac{h_1}{2} + (m-1)h_2 \right]^3 \\
Z_2 &= \left[(2m-1)\frac{h_1}{2} + mh_2 \right]^3, \quad B_{11}^{(i)} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}
\end{aligned}$$

$2k+1$ – количество слоев.

Будем изучать два случая: сдвигающее напряжение, являющееся периодической функцией от времени (динамическая устойчивость)

$$S = S_0 + S_1 \cos \theta t \quad (1.2)$$

и статический случай $S_1 = 0$.

В предположении свободного опирания пластинки на концах $z=0$ и $z=L$ решение (1.1) будем искать как

$$u = \varphi_n \sin \lambda_n z, \quad w = f_n \sin \lambda_n z, \quad \lambda_n = n\pi/L \quad (1.3)$$

и для φ_n и f_n получим систему (индекс n опустим)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi - \frac{\lambda^2 L}{\rho} (S_0 + S_1 \cos \theta t) f &= 0, \quad \omega^2 = \frac{C}{\rho} \lambda^2 \\
\frac{d^2 f}{dt^2} + \Omega^2 f - \frac{\lambda^2 L}{\rho} (S_0 + S_1 \cos \theta t) \varphi &= 0, \quad \Omega^2 = \frac{D}{\rho} \lambda^4
\end{aligned} \quad (1.4)$$

Приближенное решение системы (1.4) для определения главных областей неустойчивости найдем, следуя [4]. В окончательном виде оно имеет вид

$$\theta^2 = 2 \left[\omega^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \frac{4\lambda^2 L}{\rho} \left(S_0 \pm \frac{S_1}{2} \right)^2} \right] \quad (1.5)$$

Имеются две области неустойчивости: одна соответствует преимущественно изгибным колебаниям (знак плюс перед радикалом), а вторая – продольным.

В случае статики, при таких же граничных условиях, что выше, критическое напряжение

$$S_0^{(kp)} = \sqrt{CD} \frac{\pi}{hL} \quad (1.6)$$

При условии жесткой заделки на концах критическое напряжение будет в два раза больше, чем (1.6) (заметим, кстати, что при осевом сжатии оно больше в четыре раза).

2. Рассмотрим собственные колебания конструкций с учетом собственного веса по сдвиговой модели. Обычно принимается линейный закон изменения сжимающей силы по высоте (см. например [5]). При таком предположении движение объекта

$$G \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{p_0 x}{G} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Здесь p_0 – вес на единицу длины.

Переходим к безразмерной координате $x = l\xi$ и ищем решение (2.1) обычным образом – $v = \bar{v} \exp(i\omega t)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[(1 + \gamma\xi) \frac{d\bar{v}}{d\xi} \right] + p^2 \bar{v} &= 0 \\ p = \frac{\omega l}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad \gamma = \frac{p_0 l}{G} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение уравнения удобнее искать асимптотическим методом [6]. Тогда, пренебрегая малыми членами по сравнению с основными, имеем

$$\begin{aligned} \bar{v} &= (1 - \gamma\xi)^{-1/2} (C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta) \\ \beta &= \frac{2p}{\gamma} \left[1 - (1 - \gamma\xi)^{1/2} \right], \quad \beta(\gamma = 0) = p\xi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Удовлетворяя граничным условиям [1.2]

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \\ G \frac{d\bar{v}}{d\xi} &= -\frac{1}{\alpha_1} \bar{v}, \quad \alpha_1 = \frac{(k+1)h_1}{G_1} + \frac{kh_2}{G_2} \quad \text{при} \quad \xi = 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

для определения собственных частот получим уравнение

$$\begin{aligned} \alpha (1 - \gamma)^{1/2} \left\{ p \left[1 - (1 - \gamma)^{-1/2} \right] \cos \beta_1 + \left[\frac{2p^2}{\gamma} + \frac{\gamma}{2} (1 - \gamma)^{-1/2} \right] \sin \beta_1 \right\} &= \frac{2p}{\gamma} \cos \beta_1 - \sin \beta_1 \\ \alpha = \frac{G\alpha_1}{l}, \quad \beta_1 &= \beta(\xi = 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В частности, при $\gamma = 0$ получим (см. [1], (2.3))

$$\alpha p \operatorname{tg} p = 1$$

а для жесткой заделки ($\alpha = 0$)

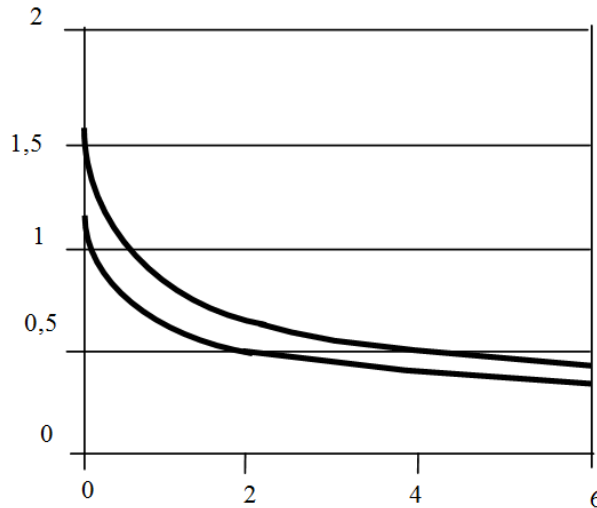
$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{2p}{\gamma} \quad (2.6)$$

На рисунке приведены кривые изменения первой частоты (p_1) в зависимости от γ и α . Верхняя кривая соответствует случаю без учета собственного веса ($\gamma = 0$), а вторая – при $\gamma = 0.5$. Как видно из рисунка, с увеличением α (уменьшением жесткости опоры) разность между частотами при $\gamma = 0$ и $\gamma = 0.5$ уменьшается.

Как известно, при рассмотрении устойчивости стержней в качестве возмущенного состояния принимается изгибная деформация. При возмущении в виде сдвига слишком

велики получаемые критические параметры. Однако в [7] был предложен вариант уточнения уравнения сдвиговой деформации. Для задачи устойчивости оно выглядит так:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \gamma\xi) \frac{dv}{d\xi} \right] + Qv = 0, \quad Q = \frac{GF l^2}{EJ}. \quad (2.7)^*$$



В классической постановке член с Q^* отсутствует. Решение предыдущей задачи фактически дает ответ и для настоящей. Если там для заданной γ определяется p , то здесь, уже задаваясь Q , нужно определить γ , которая дает нетривиальное решение, т.е. в конечном счете можно пользоваться кривыми рисунка.

3. Теперь рассмотрим случай, когда движение объекта описывается изгибом. Запишем уравнение устойчивости (возмущенное состояние)

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d}{dx} \left(\rho_0 x \frac{dw}{dx} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Решение (3.1) выражается через Бесселевы функции [5]. Интересно, что критическая нагрузка (критический вес) одинаково независима от имеющегося на конце $x=l$ условия жесткой или гибкой заделки (см. [1], (2.6)). Отличаются только формы потери устойчивости.

Критическая нагрузка определяется из условия

$$J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} q \right) = 0, \quad q^2 = \frac{p_0 l^3}{EJ}, \quad \text{т.е.} \quad P_{kp} = p_0 l = 7.868 \frac{EJ}{l^2}, \quad (3.2)$$

В [1, 2] движение сплошной среды заменено движением дискретной системы, где коэффициенты жесткости определялись решением задачи статики. Из (3.1) определить эти коэффициенты аналитически и таким образом выявить влияние собственного веса

* В выражении Q специально оставлены коэффициенты G и E , так как в сооружениях вряд ли имеет место известное соотношение.

на частоты не представляется возможным. Поэтому как одно из решений задачи можно рекомендовать деление общей длины на несколько частей, причем сжимающая сила на каждом участке постоянна, но различна для различных участков. Сосредоточенная сила на каждом участке на единицу больше, чем на предыдущем (если нумерация приводится со свободного конца, то на первом участке сжатие отсутствует), т.е. имеем

$$\begin{aligned} W_1 &= C_1^{(1)}x^3 + C_2^{(1)}x^2 + C_3^{(1)}x + C_4^{(1)}, \\ W_{k+1} &= C_1^{(k+1)}\cos S_k x + C_2^{(k+1)}\sin S_k x + C_3^{(k+1)}x + C_4^{(k+1)}, \quad k=1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

В точках соединения различных ($x = kl_0$, $l = nl_0$) участков должны быть удовлетворены условия

$$\begin{aligned} w_n &= w_{n+1}, \quad w'_k = w'_{k+1}, \quad w''_k = w''_{k+1} \\ EJw''_k + (k-1)Pw'_k &= EJw''_{n+1} + kPw'_k + Q \end{aligned} \quad (3.4)$$

На свободном конце условия обычные, а на $x = l$ имеют место условия (2.6) работы [1]. В [8] собственные частоты, когда заделка на основании жесткая, определялись методом Галеркина.

При изучении устойчивости в такой постановке Q в (3.4) нужно опускать и определять P_{kp} из однородной системы.

Решение задачи устойчивости проиллюстрируем на примере, когда длина объекта разделена на три равные части. На первом участке (от свободного конца) сжимающей силы нет, на втором она равна P и на третьем – $2P$.

Пользуясь решением типа (3.3) и удовлетворяя условиям (3.4), для определения критической силы получаем уравнение

$$\sin \lambda \sin \sqrt{2}\lambda = \sqrt{2} \cos \lambda \cos \sqrt{2}\lambda, \quad \lambda^2 = \frac{Pl_0}{EJ} \quad (3.5)$$

Наименьший корень (3.5) есть

$$\lambda = 0.7189 \quad \text{или} \quad P_{kp} = 0.5168 \frac{EJ}{l_0^2} \quad (3.6)$$

Суммарная сила ($\bar{P} = 3P$), которая вызывает потери устойчивости в зависимости от того, брать $2l_0 = l$ или $3l_0 = l$, будет соответственно

$$\bar{P}_{kp} = 6.2016 \frac{EJ}{l^2} \quad \text{или} \quad \bar{P}_{kp} = 13.9536 \frac{EJ}{l^2} \quad (3.7)$$

Отличие (3.7) от (3.2) не очень разительное и можно, увеличивая число участков, получить более приемлемые результаты.

Колесание системы будем изучать на примере системы с одной степенью свободы. Пусть сосредоточенная сила (собственный вес) приложена в центре тяжести объекта или, если исходить из условия равенства критических сил, в одной точке и по

(3.2). Точка эта находится в $l_1 = 0.56l$ от свободного конца. Тогда прогиб в этой точке будет

$$\begin{aligned} w/l_1 &= \frac{Ql_1^3}{EJ\lambda^3} (tg\lambda + \alpha\lambda^3 - \lambda), \quad \lambda = \sqrt{\frac{P}{EJ}} l_1. \\ P &= Mg, \quad \alpha = \alpha_1 \frac{EJ}{Fl_1^3} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно

$$\omega = \left(\frac{g}{l} \frac{\lambda}{tg\lambda + \alpha\lambda^3 - \lambda} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

α λ	0	0.1
0	1	0.9853
0.2	0.9938	0.8729
0.4	0.9674	0.8547
0.6	0.9253	0.8253
0.8	0.8622	0.7796
1	0.7733	0.7112

Для случая жесткого защемления $\alpha = 0$. В таблице приведены значения относительной частоты – отношение (3.6) к $\omega_0 = (3EJ/Ml_1^3)^{1/2}$ для различных λ . Последняя есть частота без учета собственного веса, и на конце имеются условия заделки.

4. В работе [7] на примере уточненного уравнения сдвига изучена задача оптимального управления, когда последнее осуществляется через внешнюю нагрузку. Здесь рассмотрим подобную задачу, когда управление осуществляется через граничное условие. Для уравнения

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \chi w \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \chi = \frac{G F}{E J} \quad (4.1)$$

заданы начальные условия

$$t = 0 \quad w = \Phi_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \Phi_2(x) \quad (4.2)$$

Один край $x = l$ свободен, и управление осуществляется через перемещение в краю:

$$w = F(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (4.3)$$

Собственные функции для данной задачи $\{\sin \mu_n\}$, если брать

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \quad (4.4)$$

для f_n получим

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + \omega_n^2 f_n = 2\lambda_n F(t), \quad \omega_n^2 = a^2 (\mu_n^2 - \chi) \quad (4.5)$$

Решением (4.5) после удовлетворения начальным условиям (4.2) будет

$$f_n = a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{2\lambda_n}{\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau_k \quad (4.6)$$

Задача управления формулируется обычным образом – в момент времени $t = T$ перемещение и скорость точек свести к заданному состоянию – $w(x, T) = \psi_1(x)$, $\frac{\partial w}{\partial t} = \psi_2(x)$, при этом минимизируя некоторый функционал. Для последнего как критерий качества примем минимум функционала

$$I = \int_0^T F^2(t) dt \quad (4.7)$$

Условия эти следующие:

$$\begin{aligned} \int_0^T F(t) X_1(x, \tau) d\tau &= \Psi_1(x) \\ \int_0^T F(t) X_2(x, \tau) d\tau &= \Psi_2(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x \sin \omega_n (T - \tau)$, $X_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x \cos \omega_n (T - \tau)$, а $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ есть определенная сумма от $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ и первых двух членов от (4.6).

Так как соотношения (4.8) верны для любого $x (0 < x < l)$, то можно брать определенное значение $x = x_0$ и вычислитель F , которое сообщает минимум (4.7),

$$F = -\frac{1}{2} [v_1 X_1(x_0, \tau) + v_2 X_2(x_0, \tau)] \quad (4.9)$$

Множители Лагранжа v_1 и v_2 определяются из системы (4.8) при $x = x_0$.

Изложенное проиллюстрируем на простом примере. Пусть в момент $t = 0$ системе сообщено перемещение в виде первой гармоники:

$$w = a_1 \sin \mu_1 x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (4.10)$$

В момент $t = T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ смещение будет (4.10). Если же требовать, чтобы в $t = T$ оно было

в покое:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = T \quad (4.11)$$

то для $F = -\frac{1}{2}(v_1 \sin \omega_1 t + v_2 \cos \omega_1 t)$ имеем $v_1 = 0$ и $v_2 = -\frac{2a_1 \omega_1}{T \lambda_1}$, т.е.

$$F = \frac{a_1}{2\pi\lambda_1} \sin \omega_1 t \quad (4.12)$$

Настоящая работа, как и [1,2], выполнена по теме №0008.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты (часть III)

Изучаются вопросы устойчивости и влияние собственного веса на собственные частоты отдельных частей объекта. Рассмотрен также пример оптимального управления движением колонны, когда оно осуществляется через граничные условия.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Մեյսմապաշտպանության համակցված մի եղանակի մասին (III մաս)

Ուսումնասիրվում են դիտարկվող օբյեկտի առանձին մասերի կայունության և սեփական քաշից սեփական հաճախությունների կախվածության հարցերը: Դիտարկվում է նաև սյան շարժման օպտիմալ դեկավարման խնդիրը, երբ վերջինս իրականացվում է եզրային պայմանների միջոցով:

L. A. Movsisyan

On One Combined Method of Seismoprotection (Part III)

The problems of different parts of the considered object and the influence of own weight on own frequencies are studied. Besides, the problem of optimal control of the column motion when the latter is realized due to the boundary condition is investigated.

Լիտերատուրա

1. *Մովսիսյան Լ.Ա.* - ДНАН РА. 2009. N 2. С. 137-144.
2. *Մովսիսյան Լ.Ա.* - ДНАН РА. 2010. N 3. С. 228-234.

3. *Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В.* - Изв. АН Арм ССР. Механика. 1973. Т.26. N 6. С.18-28.
4. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М. Гостехиздат. 1956. 600 с.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М. ГИФ-МЛ. 1963. 879 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. Наука. М. 1976. 576 с.
7. *Мовсисян Л.А.* - ДНАН РА. 2001. Т. 101. № 4. С. 330-336.
8. *Хачиян Э.Е.* Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ереван. Айастан. 1973. 327 с.