ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 111 2011 № 4

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.923, 519.85

Академик А. Б. Нерсесян, А. А. Гаспарян

Ускорение сходимости рядов по полиномам Лежандра

(Представлено 18/IV 2011)

Ключевые слова: *ускорение сходимости, ортогональные многочлены, быстрые алгоритмы*

1. Введение. Идея ускорения сходимости классического ряда Фурье по системе $\{e^{i\pi nx}\}$ для кусочно-гладкой функции $f(x), -1 \le x \le 1$, была предложена А.Крыловым еще в 1905 г. (см., например, [1]), однако ее реализация требовала знания не только конечного количества коэффициентов Фурье $\{f_n\}, -N \le n \le N, 0 < N < \infty$, но и величин скачков f и ее производных в заранее заданных сингулярных точках.

В работе [2] К.Экгоф показал, что скачки f и ее производных могут быть эффективно найдены, если значения $\{f_n\}_{n=0}^{N}$ заданы с достаточной точностью и N достаточно велико. Соответствующий метод, — назовем его методом Крылова — Экгофа (КЕ-методом), — оказался эффективным и был обобщен в разных направлениях (см. [3-5]и указанную там литературу). В частности, в работе [5] был предложен более общий, "квазиполиномиальный", метод (QP-метод), в применении к разложениям по собственным функциям регулярных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами (если коэффициент при старшей производной считать равным единице). Как показал численный эксперимент, примененный к разложениям по классической системе Бесселя, соответствующий алгоритм работает достаточно эффективно и устойчиво.

Идея КЕ-метода применена ниже к разложениям по ортогональной системе классических полиномов Лежандра. В данном случае мы имеем дело с собственными функциями задачи для дифференциального уравнения с сингулярными коэффициентами (см. (1) ниже) и пока не удалось получить здесь все аналоги результатов работы [5]. Это относится как к точным оценкам асимптотических ошибок, так и к строгому обоснованию аналога QP-метода. Однако, имея в виду, что разложения по полиномам Лежандра исключительно важны с прикладной точки зрения, мы в ряде случаев приводим обоснование предлагаемого метода на уровне анализа соответствующих численных экспериментов, проведенных с применением пакетов системы MATHEMATICA 7.

2. Полиномы Лежандра. Приведем необходимые для дальнейшего сведения (более подробную информацию можно найти в [6, 7]). Классические полиномы Лежандра $\{P_n(x)\}$, $-1 \le x \le 1, n \ge 0$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\mathrm{L}\, P_n(x) \equiv \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x) = -\lambda_n\, P_n(x),\ \lambda_n = n\,(n+1). \tag{1}$$

Справедливы следующие формулы ($|x| \le 1$ и $\|\cdot\|_2 - L_2$-норма):

$$\begin{aligned}(1-x^2)P_n(x)' = (n+1)(x\,P_n(x) - P_{n+1}(x)),\ (2n+1)\int P_n(x)\,dx =\\ P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x),\ P_0(x) = 1,\ P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n,\\ |P_n(x)| \le 1,\ \|P_n(x)\|_2 = (n+1/2)^{-1/2}.\end{aligned} \tag{2}$$

Ряд по ортонормальной системе полиномов $\{(n+1/2)^{1/2}\, P_n(x)\}$, $n \ge 0$, сходится не только в L_2, но и в $L_p\,, 4/3 < p < 4$.

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}(1+2n)(\mathrm{L}^q f, P_n) = O(1), n \to \infty,\ \|f - S(f)_N\|_2 \le\\ CN^{-2q}\|u\|_{2q},\ \|f - S(f)_N\|_\infty \le CN^{-2q+1}\|f\|_{2q},\end{aligned} \tag{3}$$

где, при $s = 2q, q \ge 1$, $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $H^s[-1,1]$ с нормой $\|\cdot\|_s$, а $S(f)_N$ — частичная сумма разложения f по полиномам Лежандра

$$S(f)_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(n+1/2)\, f_n\, P_n(x),\ f_n = (f, P_n) \tag{4}$$

и C — постоянная, зависящая только от q. Как видим, в отличие от ряда Фурье для гладкой на отрезке $[-1,1]$ функции $f(x)$, ряд по полиномам Лежандра сходится тем быстрее, чем выше степень гладкости f.

Нас интересует случай, когда разлагаемая функция $f(x)$ кусочно-гладкая, а именно, имеется конечное количество заданных точек $-1 < a_1 < \ldots < a_r$, $r \ge 1$ потенциальных разрывов f и ее производных до порядка $m \ge 1$. Известно (см., например, [8]), что в этом случае в точках разрывов

f наблюдается осцилляция, подобная классическому явлению Гиббса и приводящая к отсутствию равномерной сходимости $S(f)_N$ к f и к медленной L_2-сходимости ($N \to \infty$).

3. Схема метода типа Крылова — Экгофа. Начнем с простейшего случая, когда $f(x)$ имеет только одну точку разрыва $x = a$, $|a| < 1$, а на отрезках $[-1, a]$ и $[a, 1]$ дважды дифференцируема (в точке a — слева и справа). Если обозначить через $A_0 = f(a_+) - f(a_-) \neq 0$ и $A_1 = f'(a_+) - f'(a_-)$ скачки f и ее первой производной, то (см. (1)) интегрированием по частям придем к формуле

$$n(n+1)\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx = A_0(1-a^2)P_n'(a) - A_1(1-a^2)P_n(a) -$$
$$\int_{-1}^{a} P_n(x)\,(f'(x)(1-x^2))'\,dx - \int_{a}^{1} P_n(x)\,(f'(x)(1-x^2))'\,dx. \tag{5}$$

Отсюда следует ($n \neq 0$), что

$$f_n = (n+1/2)^{1/2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx = \phi_1(n) + \phi_2(n) + \phi_3(n), \tag{6}$$
$$\phi_1(n) = (n+1/2)^{1/2} n^{-1}(n+1)^{-1} A_0(1-a^2)P_n'(a),$$
$$\phi_2(n) = -(n+1/2)^{1/2} n^{-1}(n+1)^{-1} A_1(1-a^2)P_n(a),$$

а $\phi_3(n)$ соответствует интегралам в (5). При $n \to \infty$ справедливы следующие оценки (см. (2)):

$$\phi_1(n) = O(n^{-1}),\ \phi_2(n) = O(n^{-2}),\ \phi_3(n) = O(n^{-3}), \tag{7}$$

причем при $P_n'(a) \neq 0$ $\phi_1(n)/\phi_2(n) = O(n)$.

С другой стороны, если обозначить через $\chi(a,x)$ характеристическую функцию интервала (a, ∞), то, согласно (2), справедливо следующее ее разложение:

$$\chi(a,x) = \frac{(1-a)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(P_{n-1}(a) - P_{n+1}(a)\right)\, P_n(x). \tag{8}$$

Отсюда следует, что функция $g(x) = f(x) - A_0\,\chi(a,x)$ не имеет разрывов, а ее коэффициенты Фурье явным образом выражаются через $\{f_n\}$ и имеют (в отличие от них) порядок убывания $O(n^{-2})$, $n \to \infty$.

Таким образом, если мы знаем точку скачка a пока еще не известной функции $f(x)$, его величину A_0 и коэффициенты $\{f_n\}_{n=0}^{N}$, то можем применить, вместо приближенного восстановления значений $f(x)$ посредством усеченного ряда (4), разложение в такой же ряд для функции $g(x)$. Естественно ожидать, что при этом мы получим более точную информацию о значениях $f(x)$, если N достаточно велико.

Приведем два подхода к задаче приближенного нахождения скачка A_0, при известных системе коэффициентов $\{f_n\}_{n=0}^N$ и точке скачка a. С этой целью заметим, что если в формуле (6) справа отбросить члены $\phi_2(n)$ и $\phi_3(n)$ (или только член $\phi_3(n)$), то, при $n \to \infty$, относительная ошибка будет иметь, вообще говоря, порядок $O(n^{-1})$ (или $O(n^{-2})$). Назовем такой подход алгоритмом 1 (алгоритмом 2) и заметим, что, согласно (6), $f_n \simeq \phi_1(n)$ ($f_n \simeq \phi_1(n) + \phi_2(n)$). Если n достаточно велико и $P'_n(a) \neq 0$, то алгоритм 1 позволяет (см. (6)) найти A_0. Что же касается алгоритма 2, то в нем необходимо одновременно найти и A_1 и поэтому надо применить (6) при двух значениях $n = n_1$ и $n = n_2, n_2 < n_1$. Тогда дело сведется, как нетрудно убедиться, к обращению следующей 2×2-матрицы:

$$M_a(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} aP_{n_1}(a) - P_{n_1+1}(a) & (a^2-1)\,P_{n_1}(a)/(n_1+1) \\ aP_{n_2}(a) - P_{n_2+1}(a) & (a^2-1)\,P_{n_2}(a)/(n_2+1) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

определитель которой обозначим через $d(a) = Det M_a(n_1, n_2) \neq 0$.

4. Численные результаты. Численный эксперимент с функциями, имеющими один или два скачка, показал, что соответствующие алгоритмы работают эффективно и стабильно в широком диапазоне коэффициентов $\{f_n\}$, $n \leq 300$. Рассмотрим, например, функции

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 \leq x < 1/3, & x^2+1 \\ 1/3 \leq x \leq 1, & 3-x^2 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} -1 \leq x < -1/5, & 3\,x^2, \\ -1/5 \leq x < 1/3, & e^{2x}, \\ 1/3 \leq x \leq 1, & \sin(x/2)\,, \end{cases}$$

имеющие, соответственно, один и два скачка (в точках $x = a = 1/3$ и $x = a_1 = -1/5$, $x = a_2 = 1/3$ соответственно). Их коэффициенты Лежандра представимы в явном виде.

В табл. 1 и 2 приводятся ошибки при вычислении приближенных значений этих функций, при заданном N, посредством обычного разложения (4) (алгоритм $Classic$), посредством ускорения сходимости с предварительным вычислением скачков функции (алгоритм $Type\ One$) и посредством ускорения сходимости с предварительным вычислением скачков функции и ее производных (алгоритм $Type\ Two$). Здесь $Err_2 - L_2$ — ошибка и Err_∞ — равномерная ошибка.

Из этих и других, полученных нами, численных результатов следует, что предлагаемые алгоритмы работают достаточно быстро и устойчиво, вплоть до использования 300 коэффициентов Лежандра (при $N \simeq 350$ заметно сказывается накопление ошибок). В то же время обычный процесс разложения в данный ряд (алгоритм $Classic$) уже при $N = 50$ уступает в точности примененным здесь алгоритмам, как правило, на один порядок.

Таблица 1

Абсолютные ошибки при восстановлении функции $f_1(x), |x| \le 1$

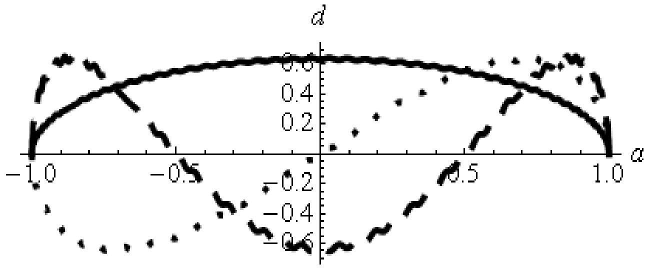
$Algorithms$		N=50	N=100	N=150	N=200	N=250
$Classic$	$Err_2 =$	$1.3\,e-1$	$9.7\,e-2$	$7.9\,e-2$	$6.8\,e-2$	$6.1\,e-2$
	$Err_\infty =$	$9\,e-1$	$9\,e-1$	$8.5\,e-1$	$8\,e-1$	$8\,e-1$
$Type\ One$	$Err_2 =$	$4.2\,e-3$	$7.4\,e-4$	$3.1\,e-4$	$9.5\,e-4$	$1\,e-4$
	$Err_\infty =$	$3\,e-2$	$8\,e-3$	$5\,e-3$	$1.4\,e-2$	$1.4\,e-3$
$Type\ Two$	$Err_2 =$	$1.1\,e-3$	$3.9\,e-4$	$2.1\,e-4$	$1.4\,e-4$	$1\,e-4$
	$Err_\infty =$	$8\,e-3$	$4\,e-3$	$2.5\,e-3$	$1.5\,e-3$	$1.4\,e-3$

Таблица 2

Абсолютные ошибки при восстановлении функции $f_2(x), |x| \le 1$

$Algorithms$		N=50	N=100	N=150	N=200	N=250
$Classic$	$Err_2 =$	$1.4\,e-1$	$1\,e-1$	$8.3\,e-2$	$7.2\,e-2$	$6.4\,e-2$
	$Err_\infty =$	$9\,e-1$	$9\,e-1$	$8.5\,e-1$	$8.5\,e-1$	$8\,e-1$
$Type\ One$	$Err_2 =$	$7.8\,e-3$	$1.5\,e-2$	$1.1\,e-3$	$5.9\,e-4$	$1.8\,e-3$
	$Err_\infty =$	$5\,e-2$	$1\,e-1$	$1.4\,e-2$	$6\,e-3$	$2\,e-2$
$Type\ Two$	$Err_2 =$	$3.7\,e-3$	$1.2\,e-3$	$6.9\,e-4$	$4.6\,e-4$	$3.2\,e-4$
	$Err_\infty =$	$2\,e-2$	$1\,e-2$	$6\,e-3$	$4\,e-3$	$3.5\,e-3$

Замечание 1. Алгоритм 1 теоретически работает при $P'_n(a) \ne 0$, однако, если это условие не выполнено, то надо перейти от n к $n-1$ и т.д. Такой же подход необходимо применить и к алгоритму 2, имея в виду необходимость условия $d(a) \ne 0$. Здесь проявляется специфика данной задачи, ибо в работах [2-5] соответствующие алгоритмы связаны с обращением матрицы Вандермонда и поэтому они работают безусловно. Рисунок иллюстрирует сказанное на примере алгоритма 2.



Графики величины определителя $d(a)$, $|a| \le 1$ при $n_1 = 50$, когда $n_2 = 49$ (сплошная линия), $n_2 = 48$ (мелкий пунктир) и $n_2 = 47$ (крупный пунктир).

Оказывается, что и при других значениях n_1 наблюдается такая же картина и поэтому, если $n_2 = n_1 - 1$, то в алгоритме 2 никаких дополнительных условий на $d(a)$ ставить не надо. Именно это обстоятельство использовано ниже, в программе алгоритма 2. В случае же $n_2 = n_1 - 2$ "опасна" точка разрыва функции $f(x)$, близкая к нулю, а при $n_2 = n_1 - 3$ точка разрыва вблизи $x = \pm 1/2$.

5. Алгоритмы. Ниже приводятся соответствующие алгоритмы ускорения сходимости в коде MATHEMATICA в случае, когда разлагаемая функция $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x = a$, $|a| < 1$ и $m = n + 1$.

5.1. Алгоритм 1.

$BeginPackage[''NumericalMath`LegendreOne''];$
$Begin[''`Private`''];$

(⋆ Модуль $LegendreOne[cf\_, jp\_, x\_]$ принимает в качестве аргументов список коэффициентов Фурье $cf\_$, точку разрыва функции $jp\_$, а также независимую переменную $x\_$ в итоговой функции, которую возвращает модуль. В алгоритме модуля предварительно находится скачок A_0 функции f. ⋆)

$LegendreOne[cf\_, jp\_, x\_] := Module[\{Func, n, A_0, fcf, y, t, k\},$
$\quad If[\,!ListQ[cf]\,||\,Length[cf] < 10,$
$\qquad Message[\,LegendreOne :: \text{“}notlist\text{“}, cf];$
$\qquad Return[];$
$\quad];$
$\quad t = n = Length[cf];$ (⋆переход к другому n⋆)
$\quad Do[\,If[\,|P_{t-2}(jp) - jp\,P_{t-1}(jp)| < 10^{-9},$
$\qquad\quad If[\,|P_{t-2}(jp) - jp\,P_{t-1}(jp)| > |P_{t-3}(jp) - jp\,P_{t-2}(jp)|,$
$\qquad\qquad k = t,$
$\qquad\qquad k = t - 1;$
$\qquad\quad];$
$\qquad\quad t = t - 1,$
$\qquad\quad k = t;$
$\qquad\quad Break[];$
$\qquad], \{4\}$
$\quad];$
$\quad n = k;$ (⋆ количество коэффициентов⋆)
$\quad A_0 = n\,Part[cf, n]/\,(\sqrt{n - 1/2}\,(P_{n-2}(jp) - jp\,P_{n-1}(jp)));$ (⋆величина скачка A_0⋆)
$\quad fcf = Table[\,\sqrt{i + 1/2}\,(P_{i-1}(jp) - P_{i+1}(jp))/\,(2i + 1), \{i, 0, n - 1\}];$
$\quad Func = Simplify[\,\sum_{j=0}^{n-1}\,\sqrt{j + 1/2}\,P_j(y)(Part[cf, j + 1] - A_0\,Part[fcf, j + 1])]+$
$\quad A_0\,If[y < jp, 0, 1];$

$Func\,/.\,y \to x$ (*Возвращаемая функция от переменной x*)
]

$End[];$
$EndPackage[];$

5.2. Алгоритм 2.

$BeginPackage["NumericalMath`LegendreTwo"];$
$Begin["`Private`"];$

(* Вспомогательный модуль *)
(* Вспомогательный модуль $JumpsTwo[Fn\_, Fm\_, n\_, a\_]$ принимает в качестве аргументов коэффициенты $Fn\_$, $Fm\_$, индекс n младшего коэффициента Fn, а также точку разрыва $a\_$. Функция возвращает 2-мерный список, где первый элемент списка — это скачок функции, а второй элемент списка — скачок производной функции. *)

$JumpsTwo[Fn\_, Fm\_, n\_, a\_] := Module[\{c, d, g\},$
$\quad c = ((n+1)\,P_{n+1}(a)^2 + P_n(a)\,(a\,P_{n+1}(a) - (n+2)\,P_{n+2}(a)))\,;$
$\quad d = Fn\,n\,\sqrt{2n+3}\,;$
$\quad g = (n+1)/(c\,\sqrt{n+1/2}\,\sqrt{2n+3})\,;$
$\quad g\,\{\left(Fm\,(n+2)\sqrt{2n+1}\,P_n(a) - d\,P_{n+1}(a)\right),$
$\quad (n{+}2)\left(Fm\,(n+1)\sqrt{2n+1}\,(P_{n+1}(a) - a\,P_n(a)) + a\,d\,P_{n+1}(a) - d\,P_{n+2}(a)\right)/\,(a^2-1)\}$
]

(* Основной модуль *)
(* Модуль $LegendreTwo[cf\_, jp\_, x\_]$ принимает в качестве аргументов те же величины, что и $LegendreOne[cf\_, jp\_, x\_]$, но основан на предварительном нахождении не только скачка A_0 функции f, но и скачка A_1 ее производной. *)

$LegendreTwo[cf\_, jp\_, x\_] := Module[\{Func, n, jps, A_0, fcf, y\},$
$\quad If[\,!ListQ[cf]\,||\,Length[cf] < 10,$
$\qquad Message[\,LegendreTwo :: \text{“}notlist\text{“}, cf];$
$\qquad Return[];$
$\quad];$
$\quad n = Length[cf];$ (*вычисление количества коэффициентов*)
$\quad jps = JumpsTwo[\,Part[cf, n-1],$
$\quad Part[cf, n], n-2, jp];$ (*вычисление скачков A_0 и A_1*)
$\quad A_0 = Part[jps, 1];$ (*нужный скачок A_0*)
$\quad fcf = Table[\,\sqrt{i+1/2}\,(P_{i-1}(jp) - P_{i+1}(jp))/\,(2i+1), \{i, 0, n-1\}];$

$Func = Simplify[\sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{j+1/2}\, P_j(y)(Part[cf, j+1] - A_0\, Part[fcf, j+1])]$
$+A_0\, If[y < jp, 0, 1];$
$Func/.\, y \to x$ (*Возвращаемая функция от переменной x*)
]

$End[];$
$EndPackage[];$

Замечание 2. Аналогичную, но более объемную структуру имеют используемые нами выше алгоритмы для функции $f(x)$, имеющей не более двух точек разрыва. Реализация схемы ускорения сходимости, соответствующей бо́льшему количеству скачков, сопряжена лишь с техническими трудностями.

Отметим также, что, применяя подобные алгоритмы, соответствующие данному числу скачков, на практике мы имеем в виду, что могут быть и иные скачки, но с гораздо меньшей (пренебрежительно малой) суммарной величиной скачков первых производных(в алгоритмах типа One) и как первых, так и вторых производных(в алгоритмах типа Two).

Институт математики НАН РА
Российско-Армянский (Славянский) университет

Академик А. Б. Нерсесян, А. А. Гаспарян

Ускорение сходимости рядов по полиномам Лежандра

Обсуждается задача ускорения сходимости разложений с ортогональными многочленами Лежандра для случая, когда функция кусочно непрерывная и известны только ее коэффициенты Фурье. Метод обоснован как теоретически, так и в результате численных экспериментов. Приводятся численные результаты для случая, когда разлагаемая функция имеет одну или две точки разрыва. Для одной точки разрыва предлагается также программный пакет.

Ակադեմիկոս Ա. Բ. Ներսեսյան, Ա. Հ. Գասպարյան

Լեժանդրի բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտությունների արագացում

Քննարկվում է Լեժանդրի օրթոգոնալ բազմանդամներով վերլուծությունների զուգամիտության արագացման խնդիրը այն դեպքում, երբ վերլուծվող ֆունկցիան կտոր առ կտոր անընդհատ

է, եւ հայտնի են միայն նրա Ֆուրիեի գործակիցները: Մեթոդի հիմնավորումը ստացվում է ինչպես տեսականորեն, այնպես էլ թվային փորձարարության արդյունքների միջոցով: Բերվում են թվային արդյունքներ այն դեպքերում, երբ վերլուծվող ֆունկցիան ունի մեկ կամ երկու խզման կետ: Մեկ խզման կետի դեպքում առաջարկվում է նաեւ ծրագրային փաթեթը:

Academician A. B. Nersessian, A. H. Gasparyan

Convergence Acceleration for Expansions by Legendre Polynomials

The problem of decomposition of convergence acceleration for series by Legendre's orthogonal polynomials is being discussed when the function is sectionally continuous and only Fourier — Legendre coefficients are known. The justification of the method is obtained by both theoretical and experimental results. Numerical results are given when the function has one or two points of discontinuity. In case of one point the software package is also suggested.

Литература

1. *Крылов А.* Лекции по приближенным вычислениям. Изд. АН СССР, Л. 1933.

2. *Eckhoff K.S.* - Math. Comp. 1995. V. 64. N 210. P. 671 - 690.

3. *Нерсесян А.Б.* - Доклады НАН Армении. 2004. Т. 104. N 4. С. 186-191.

4. *Нерсесян А.Б.* - Доклады НАН Армении. 2005. Т. 105. N 1. С. 28-35.

5. *Нерсесян А.Б.* - Математика в высшей школе. Научно-методический сборник. 2005. Т. 2. С. 47-63.

6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* - Высшие трансцендентные функции. Т. 2. СМБ. М. Наука.1971.

7. *Hesthaven J.S.,Kirby R.M., Quarteroni A.* - Math. Comp. 2008. V. 77. P. 1425-1452.

8. *Hesthaven J.S., Kaber S.M.,Lurati L.* - J. Scientific Computing. 2006. V. 28. N. 2-3, P. 337-359.