ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS
Հատոր Том Volume 111 2011 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С.О.Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением

(Представлено 3/XII 2010)

Ключевые слова: *микрополярно-упругий, оболочка, стесненное вращение, общая теория*

Введение. Обзор теории микрополярных тонких оболочек, пластин и стержней приведен в [1,2]. В данной работе формулируются гипотезы, имеющие математическое (асимптотическое) обоснование, исходя из которых построена общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением, с учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций.

1. Постановка задачи. Приведем основные уравнения статики микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (по общему континууму Коссера) [3] (отнестем тело – оболочку толщиной $2h$ к триортогональной системе координат $\alpha_k, H_i, H_3 = 1$):

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} = 0, \qquad \nabla_m \mu^{mn} + \varepsilon^{nmk} \sigma_{mk} = 0; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda \cdot \gamma_{kk} \cdot \delta_{nm},$$

$$\mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{nm} + \beta \cdot \chi_{kk} \cdot \delta_{nm}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - \varepsilon_{kmn}\omega^k, \qquad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n \qquad (m,n,k = 1,2,3, \quad i = 1,2). \tag{1.3}$$

На лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будем считать заданными соответствующие компоненты силового и моментного тензоров напряжений:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm}, \quad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm}, \quad \mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \mu_{33} = \pm m_3^{\pm} \quad (i = 1,2). \tag{1.4}$$

На поверхности края Σ оболочки будем рассматривать три следующих основных типа граничных условий: 1) когда заданы силовые и моментные напряжения; 2) когда точки поверхности Σ закреплены; 3) когда заданы трехмерные смешанные условия типа шарнирного опирания.

Система основных уравнений (1.1)-(1.3) общей трехмерной микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений представляет собой 42 уравнения относительно 42 неизвестных функций .

В дальнейшем будем использовать трехмерный вариант микрополярной теории упругости, называемой микрополярной теорией упругости со стесненным вращением (или псевдоконтинуум Коссера), базирующейся на двух следующих основных положениях [4,5]: а) фиксируется жесткая зависимость вектора поворота $\vec{\omega}$ от ротора перемещений

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{V}, \tag{1.5}$$

совпадающая с векторным соотношением классической теории упругости;

б) как в общем континууме Коссера, сохраняются моментные напряжения и качество несимметричности силовых напряжений.

При рассмотрении трехмерной микрополярной теории упругости со стесненным вращением, к уравнениям (1.1)-(1.3) присоединим условия (1.5) (здесь следует иметь в виду, что это присоединение не может быть чисто механическим, т.к. в результате будем иметь 45 уравнений относительно 42 неизвестных функций). Дело в том, что при принятии условия стесненного вращения (1.5) сильно меняются соотношения упругости (1.2). Чтобы выяснить этот вопрос, сначала рассмотрим соотношения для σ_{12}, σ_{21}; σ_{i3}, σ_{3i} $(i = 1,2)$ из (1.2). На основе этих шести соотношений, с учетом соответствующих геометрических соотношений (1.3), легко получить следующие шесть эквивалентных соотношений, которые можем группировать в две отдельные системы соотношений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} V_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} V_2 = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{12} + \sigma_{21}), \\ \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_3}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} V_i + \frac{\partial V_i}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{i3} + \sigma_{3i}), \quad i = 1,2,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$2\omega_3=\left\{\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1\right)-\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2\right)\right\}+\frac{1}{4\alpha}\left(\sigma_{21}-\sigma_{12}\right),$$

$$2\omega_i=\left\{(-1)^j\cdot\left[\left(\frac{1}{H_j}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_j}-\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_3}V_j\right)-\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_3}\right]\right\}-(-1)^j\frac{1}{4\alpha}\left(\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\right),\quad i,j=1,2,\ i\neq j \tag{1.7}$$

Следует отметить, что в левых частях соотношений (1.6) стоят, соответственно, суммы $\gamma_{12}+\gamma_{21}$, $\gamma_{i3}+\gamma_{3i}$. Смысл этих соотношений заключается в том, что симметричная часть тензора силовых напряжений зависит от симметричной части тензора деформаций, как и в классической теории упругости [5].

Легко заметить, что члены в больших скобках в правых частях соотношений (1.7) представляют проекции вектора $rot\vec{V}$ на оси принятой криволинейной системы координат α_i,α_3. Следовательно, условия (1.5) стесненного вращения, как это вытекает из (1.7), будут иметь место в двух случаях: 1) при $\sigma_{21}-\sigma_{12}=0$, $\sigma_{j3}-\sigma_{3j}=0,\ j=1,2$, т.е. когда имеет место классическая теория упругости; 2) при $\sigma_{21}-\sigma_{12}\neq 0$, $\sigma_{j3}-\sigma_{3j}\neq 0,\ \ j=1,2$, т.е. если за основу не принимается классическая теория упругости, тогда условия стесненного вращения (1.5) будут иметь место при условии $\alpha\to\infty$ [3,5] (отметим также, что при условии $\alpha\to\infty$ невозможно предполагать в (1.7) $\omega_3=0$).

Таким образом, по микрополярной теории со стесненным вращением, фиксируя жесткую зависимость вектора поворота $\vec{\omega}$ от ротора перемещений по векторной формуле (1.5), необходимо иметь в виду, что в этом случае упругий коэффициент α имеет бесконечно большие значения и соотношения (1.7) и условия стесненного вращения (1.5) будут представлять собой одни и те же выражения. В результате основных уравнений и соотношений псевдоконтинуума Коссера всего 42: уравнения движения (1.1) – 6; соотношения упругости (1.2) для $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33}$, а также соотношения упругости (1.6), общее число – 6; физические соотношения из (1.2) для $\mu_{11},\mu_{22},\mu_{33},\mu_{ij},\mu_{i3},\mu_{3i}$, общее число – 9; геометрические соотношения (1.3) для $\gamma_{11},\gamma_{22},\gamma_{33},\gamma_{ij},\gamma_{i3},\gamma_{3i},\chi_{11},\chi_{22},\chi_{33},\chi_{ij},\chi_{i3},\chi_{3i}$, общее число – 9+9=18; условия стесненного вращения (1.5) в координатной форме, общее число – 3; неизвестных функций тоже 42. Как следует из вышеизложенного, упругий коэффициент α не фигурирует в физических соотношениях микрополярной теории стесненного вращения.

Больше того, легко показать, что упругий коэффициент β (который может иметь конечное значение) тоже не участвует в физических соотношениях микрополярной теории стесненного вращения. Действительно, так как для любого необходимое число раз дифференцируемого вектора имеет место тождество $div rot\vec{a} \equiv 0$, легко заметить, что первый инвариант тензора изгиба-кручения тождествен нулю [4]: $\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33} \equiv 0$.

Далее, для первого инварианта тензора моментных напряжений получим [4]

$$\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} = (2\gamma + 3\beta)(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33}) \equiv 0. \qquad (1.8)$$

Имея в виду условие (1.8), для моментных напряжений μ_{kk} из (1.2) получим:

$$\mu_{kk} = 2\gamma \cdot \chi_{kk} \quad (k = 1,2,3) \qquad (1.9)$$

где упругий коэффициент β не фигурирует.

Отметим, что микрополярная теория упругости со стесненным вращением, кроме указанных выше особенностей, имеет и другие [4], например, в рассматриваемом нами случае граничных условий (1.4) на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ независимыми будут только пять.

2. Модель микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Основываясь на результатах асимптотического метода интегрирования поставленной краевой задачи для систем уравнений (1.1)-(1.3) [6], при построении прикладной-двумерной теории микрополярных оболочек со стесненным вращением можем применять следующие достаточно общие гипотезы: 1) будем считать выполненным условие стесненного вращения $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{V}$; 2) нормальный к срединной поверхности оболочки линейный элемент во время деформации, не изменяя своей длины, должен оставаться линейным, но не перпендикулярным к деформированной срединной поверхности, т.е.

$$V_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2), \qquad V_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (2.1)$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \iota(\alpha_1, \alpha_2). \qquad (2.2)$$

Кинематические гипотезы относительно перемещений (2.1) по сути представляют собой известные кинематические гипотезы Тимошенко в классической теории упругих оболочек [7]. Кинематические гипотезы (2.1), (2.2) назовем обобщенными для микрополярного случая гипотезами Тимошенко; 3) для определения перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силовых напряжений σ_{3i} $(i = 1,2)$ примем $\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2)$. После вычисления указанных величин значения σ_{3i} окончательно определим прибавлением к значениям $\overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1, \alpha_2)$ соответственно слагаемых, получаемых интегрированием по α_3 первого и второго уравнений статики из (1.1), для которых будем требовать, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю; 4) в обобщенном законе Гука (1.2) силовым напряжением σ_{33} можно пренебречь относительно напряжений σ_{ii} $(i = 1,2)$; 5) относительно единицы будем пренебрегать величинами порядка h / R.

Приведем основную систему уравнений прикладной-двумерной общей теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением, с учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, построенную при помощи принятых гипотез:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii} - T_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji} + S_{ij}\right) + \frac{N_{i3}}{R_i} = -\left(q_i^+ + q_i^-\right),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(M_{ii} - M_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(H_{ji} + H_{ij}\right) - N_{3i} = -h\left(q_i^+ - q_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] = q_3^+ + q_3^-, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(L_{ii} - L_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(L_{ji} + L_{ij}\right) + \frac{L_{i3}}{R_i} + (-1)^j\left(N_{j3} - N_{3j}\right) = -\left(m_i^+ + m_i^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 L_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(S_{12} - S_{21}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 \Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 \Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] + \left(H_{12} - H_{21}\right) = 0;$$

физические соотношения

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right], \qquad S_{12} + S_{21} = 4\mu h\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right), \qquad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right],$$

$$N_{i3} + N_{3i} = 4\mu h\left(\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}\right), \quad H_{12} + H_{21} = \frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12} + K_{21}\right), \quad L_{ii} = 4\gamma h\kappa_{ii}, \tag{2.4}$$

$$L_{ij} = 2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right], \; L_{i3} = 2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ - m_i^-}{2}\right], \; \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,\ K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,$$

$$K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i,\ \Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j,\ \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\ \kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},$$

$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\ \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\ l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},\ \Omega_i=-(-1)^i\left(\psi_j+\vartheta_j\right), \qquad (2.5)$$

$$\Omega_3=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right),\quad \iota=\frac{1}{2}\left(K_{12}-K_{21}\right),\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\qquad (i,j=1,2,\ i\neq j).$$

К системе уравнений микрополярных упругих оболочек со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (при $\alpha_1=const$):

$$T_{11}=T_{11}^*\ \text{или}\ u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^*\ \text{или}\ u_2=u_2^*,\quad N_{13}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*,$$
$$M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ K_{11}=K_{11}^*,\quad H_{12}=H_{12}^*\ \text{или}\ K_{12}=K_{12}^*,\quad L_{11}=L_{11}^*\ \text{или}\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*, \qquad (2.6)$$
$$L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\quad L_{13}=L_{13}^*\ \text{или}\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\ \text{или}\ l_{13}=l_{13}^*.$$

Здесь $T_{ii},S_{ij},M_{ii},H_{ij}$ – усилия и моменты от силовых напряжений; $L_{ii},L_{ij},\Lambda_{i3}$ – моменты и гипермоменты от моментных напряжений; u_i,w,Ω_i,Ω_3 – перемещения и повороты точек срединной поверхности; ψ_{i} – полные углы поворота нормального элемента; ι – интенсивность поворота точек вокруг нормали к срединной поверхности оболочки.

Система уравнений (2.3)-(2.5) теории микрополярных оболочек со стесненным вращением имеет 18-й порядок с девятью граничными условиями (2.6) на каждом краю срединной поверхности Г и содержит 51 уравнение с 51 неизвестной функцией ($T_{ii},M_{ii},S_{ij},N_{i3},N_{3i},H_{ij},L_{ii},L_{ij},L_{i3},L_{33},\Lambda_{i3},\Gamma_{ii},K_{ii},\Gamma_{ij},K_{ij},\Gamma_{i3},\Gamma_{3i},\kappa_{ii},\kappa_{ij},\kappa_{i3},l_{i3},u_i,w,\psi_i,\vartheta_i,\Omega_i,\Omega_3,\iota$). Из системы уравнений (2.3)-(2.5) и граничных условий (2.6) микрополярно-упругих оболочек, пренебрегая моментами и гипермоментами от моментных напряжений, выделим краевую задачу классической теории оболочек типа Тимошенко [7] (с небольшим отличием, связанным со статической гипотезой 2).

Если в системе уравнений (2.3)-(2.5) пренебречь поперечными сдвигами, т.е. иметь в виду формулы $\Gamma_{i3}+\Gamma_{3i}=0$ или $\psi_i=\vartheta_i$, получим модель микрополярных упругих оболочек со стесненным вращением, в которой вместо обобщенных кинематических гипотез Тимошенко приняты обобщенные гипотезы Кирхгофа – Лява.

Представим основные уравнения этой модели микрополярных оболочек со стесненным вращением:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}=-\left(q_i^{+}+q_i^{-}\right),$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\left(M_{11}+L_{12}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(H_{21}+L_{22}\right)}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left[\left(M_{11}+L_{12}\right)-\left(M_{22}-L_{21}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left[\left(H_{21}+L_{22}\right)+\left(H_{12}-L_{11}\right)\right]+\frac{L_{23}}{R_2}-N_{13}=-h\left(q_1^{+}-q_1^{-}\right)-\left(m_2^{+}-m_2^{-}\right), \qquad (2.7)$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial\left(H_{12}-L_{11}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(M_{22}-L_{21}\right)}{\partial \alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left[\left(M_{22}-L_{21}\right)-\left(M_{11}+L_{12}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left[\left(H_{12}-L_{11}\right)+\left(H_{21}+L_{22}\right)\right]-\frac{L_{13}}{R_1}-N_{23}=-h\left(q_2^{+}-q_2^{-}\right)+\left(m_1^{+}-m_1^{-}\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]=q_3^{+}+q_3^{-},$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)=0,$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right]+\left(H_{12}-H_{21}\right)=0,$$

физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\quad M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\quad S_{12}+S_{21}=4\mu h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),$$

$$H_{12}+H_{21}=\frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12}+K_{21}\right),\quad L_{ii}=4\gamma h\kappa_{ii},\quad L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right] \qquad (2.8)$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^{+}-m_i^{-}}{2}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^{+}+m_i^{-}}{2h}\right];$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\vartheta_j,$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i,$$

$$K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \vartheta_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\vartheta_i,\ \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\ \kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i}, \qquad (2.9)$$

$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i,\quad \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\quad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_i},$$

$$\iota=\frac{1}{2}\left(K_{12}-K_{21}\right),\quad \Omega_i=-(-1)^j\vartheta_j,\quad \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\Gamma_{12}-\Gamma_{21}\right).$$

К системе уравнений микрополярных оболочек со стесненным вращением на основе обобщенной кинематической гипотезы Кирхгофа – Лява (2.7)-(2.9) следует присоединить граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки ($\alpha_1 = \alpha_{10}$):

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \; S_{12} + \frac{H_{12} - L_{11}}{R_2} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \; N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial(H_{12} - L_{11})}{\partial \alpha_2} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$
$$M_{11} - L_{12} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \qquad (2.10)$$

Если в системе уравнений (2.7)-(2.9) и в граничных условиях (2.10) теории микрополярных оболочек со стесненным вращением пренебречь моментами и гипермоментами от моментных напряжений, получим уравнения классической теории упругих оболочек Кирхгофа – Лява.

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением

Рассматривается трехмерная краевая задача микрополярной теории упругости со стесненным вращением в тонкой области оболочки. Формулируются достаточно общие гипотезы, которые имеют математическое (асимптотическое) обоснование, исходя из которых построена общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением.

Corresponding member of NAS RA S.H.Sargsyan

General Theory of Micropolar Elastic Thin Shells with Constrained Rotation

Three-dimensional boundary problem of micropolar theory of elasticity with constrained rotation is considered in a thin domain of the shell. Rather general hypotheses are formulated which have mathematic (asymptotic) foundation and on the basis of which the general applied theory of micropolar elastic thin shells with constrained rotation is constructed.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս.Հ. Սարգսյան

Կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը

Թաղանթի բարակ տիրույթում դիտարկվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության եռաչափ եզրային խնդիրը: Ձևակերպվում են բավական ընդհանուր վարկածներ, որոնք ունեն մաթեմատիկական (ասիմպտոտիկ) հիմնավորում, որոնց հիման վրա կառուցվում է կաշկանդված պտույտներով միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր կիրառական տեսությունը:

Литература

1. *Саркисян С.О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. N2. С.84-95.
2. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.* - Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3.
3. *Пальмов В. А.* - ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401-408.
4. *Койтер В. Т.* - Механика.1965. N3. С.89-112.
5. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М. Наука. 1984. 256с.
6. *Саркисян С.О.* - Доклады НАН Армении. 2008. Т.108. N 4. С.309-319.
7. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова думка. 1973. 248 с.