

МЕХАНИКА

УДК 539.3: 534.1

Академик Л. А. Агаловян, Г. Л. Азатян, Р. С. Геворкян, А. М. Погосян

**Об асимптотическом решении пространственной динамической задачи для
прямоугольной пьезокерамической пластинки**

(Представлено 9/IX 2010)

Ключевые слова: *асимптотический метод, электроупругость, трансверсально-изотропная пьезокерамика, вынужденные колебания*

Асимптотический метод решения краевых задач теории упругости для полос и пластин с неклассическими граничными условиями, впервые примененный в [1,2], оказался эффективным для решения статических и динамических задач балок, пластин и оболочек [3,4]. В настоящей работе этим методом решается краевая задача электроупругости для пьезокерамической пластины. Аналогичные задачи для тонкой пластины разными методами решены многими авторами, в частности в [5-9]. Предлагаемое решение выгодно отличается тем, что выведенные несложные рекуррентные формулы позволяют определить компоненты вектора перемещения, тензора напряжений и напряжения электрического поля с любой асимптотической точностью. В данной работе рассматривается динамическая задача электроупругости для предварительно поляризованной пьезокерамики.

1. Имеем тонкую пластинку из предварительно поляризованной керамики в декартовой прямоугольной системе координат, занимающую область

$$\Omega = \{(x, y, z) : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq h, l = \min(a, b), h \ll l\}.$$

На лицевых поверхностях $z = \pm h$ заданы следующие механические и электрические граничные условия:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(x, y, z, t) \Big|_{z=\pm h} &= u_j^\pm(x, y) e^{i\omega t}, & j = x, y, z \\ \bar{\psi}(x, y, z, t) \Big|_{z=\pm h} &= \pm V_0(x, y) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ω – частота вынуждающего воздействия, i – мнимая единица.

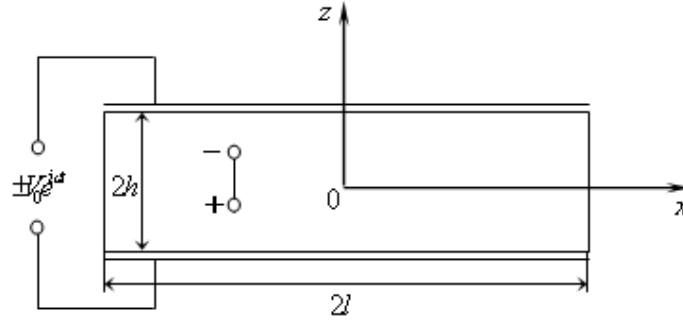


Рис. 1

Требуется найти удовлетворяющее граничным условиям (1.1) решение полной системы уравнений электроупругости пьезокерамической среды, которая состоит из:

уравнений движения

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial t^2}, \quad (x, y, z); \quad (1.2)$$

уравнений электростатики

$$\text{div} \bar{D} = \frac{\partial \bar{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{D}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{D}_z}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

$$\bar{E} = -\text{grad} \bar{\psi} = -\left(i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + j \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + k \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right);$$

соотношений состояния предварительно поляризованной трансверсально-изотропной пьезокерамики [5]

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= C_{11}^E \bar{\varepsilon}_{xx} + C_{12}^E \bar{\varepsilon}_{yy} + C_{13}^E \bar{\varepsilon}_{zz} - e_{31} \bar{E}_z \\ \bar{\sigma}_{yy} &= C_{12}^E \bar{\varepsilon}_{xx} + C_{11}^E \bar{\varepsilon}_{yy} + C_{13}^E \bar{\varepsilon}_{zz} - e_{31} \bar{E}_z \\ \bar{\sigma}_{zz} &= C_{13}^E (\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{\varepsilon}_{yy}) + C_{33}^E \bar{\varepsilon}_{zz} - e_{33} \bar{E}_z \\ \bar{\sigma}_{yz} &= C_{44}^E \bar{\varepsilon}_{yz} - e_{15} \bar{E}_y, \quad \bar{\sigma}_{xz} = C_{44}^E \bar{\varepsilon}_{xz} - e_{15} \bar{E}_x, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{1}{2} (C_{11}^E - C_{12}^E) \bar{\varepsilon}_{xy} \\ \bar{D}_x &= \varepsilon_{11}^S \bar{E}_x + e_{15} \bar{\varepsilon}_{xz}, \quad \bar{D}_y = \varepsilon_{11}^S \bar{E}_y + e_{15} \bar{\varepsilon}_{yz}, \\ \bar{D}_z &= \varepsilon_{33}^S \bar{E}_z + e_{31} (\bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{\varepsilon}_{yy}) + e_{33} \bar{\varepsilon}_{zz} \end{aligned} \quad (1.4)$$

соотношений Коши

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}, \\ \bar{\varepsilon}_{xz} &= \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}, \quad \bar{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}, \quad \bar{\varepsilon}_{yz} = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$, $i, j = x, y, z$ – компоненты тензора напряжений, \bar{u}_j – вектора перемещения, \bar{D}_j – вектора электрического смещения (индукция), \bar{E}_j – вектора напряженности электрического поля $j = x, y, z$, $\bar{\psi}$ – потенциал электрического поля, ρ –

плотность неоднородного пьезокерамического материала, C_{jk}^E – упругие постоянные (модули упругости) при постоянном (нулевом) электрическом поле, ε_{jj}^S , $j=1,3$ – диэлектрические проницаемости при постоянной (нулевой) деформации, e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули керамики (пьезокерамические постоянные).

Для решения сформулированной задачи представим искомые величины в виде произведений:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x, y, z, t) &= Q(x, y, z)e^{i\omega t}, \\ \bar{Q} &= \{\bar{u}_x, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{D}_x, \bar{E}_x, \bar{\psi}\} \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В уравнениях и соотношениях (1.2)-(1.5) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad U = \frac{u_x}{l}, \quad V = \frac{u_y}{l}, \quad W = \frac{u_z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l} \quad (1.7)$$

одновременно обозначим

$$\varphi = \frac{\bar{\psi}}{h}. \quad (1.8)$$

Получим сингулярно возмущенную геометрически малым параметром ε систему уравнений и соотношений

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho \omega^2 h^2 u = 0, \quad (x, y, z; \xi, \eta, \zeta; u, v, w) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial \xi} + \frac{\partial D_y}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial D_z}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\sigma_{xx} = C_{11}^E \frac{\partial U}{\partial \xi} + C_{12}^E \frac{\partial V}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} C_{13}^E \frac{\partial W}{\partial \zeta} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_{yy} = C_{12}^E \frac{\partial U}{\partial \xi} + C_{11}^E \frac{\partial V}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} C_{13}^E \frac{\partial W}{\partial \zeta} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_{zz} = C_{13}^E \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^{-1} C_{33}^E \frac{\partial W}{\partial \zeta} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_{xz} = C_{44}^E \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) + \varepsilon_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \sigma_{yz} = C_{44}^E \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) + \varepsilon_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2} (C_{11}^E - C_{12}^E) \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} \right), \quad D_x = -\varepsilon \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + e_{15} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right) \quad (1.10)$$

$$D_y = -\varepsilon \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right), \quad D_z = -\varepsilon \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + e_{31} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^{-1} e_{33} \frac{\partial W}{\partial \zeta}$$

Решение сингулярно возмущенной системы уравнений (1.9) при учете (1.10) складывается из решения внутренней задачи и сопряженного с ним решения задачи пограничного слоя. Здесь ограничимся построением решения внутренней задачи.

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения [1,4]

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = \varepsilon^{\chi_Q} \sum_{s=0}^N \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (1.11)$$

где $\chi_\sigma = \chi_\varphi = -1$ для всех напряжений и потенциала электрического поля, $\chi_U = 0$ для всех перемещений.

Подставив (1.11) в систему уравнений (1.9), соотношения (1.10) и приравняв коэффициенты при ε^s в левых и правых частях, получим следующие системы разрешающих уравнений и соотношений состояния:

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha^2 U^{(s)} = R_U^{(s)}, \quad \frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha^2 V^{(s)} = R_V^{(s)}, \quad \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \beta^2 W^{(s)} = R_W^{(s)}, \quad (1.12)$$

$$e_{33} \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial^2 \varphi^{(s)}}{\partial \zeta^2} = R_\varphi^{(s)},$$

$$\alpha^2 = \rho \omega^2 h^2 / C_{44}^E, \quad \beta^2 = \varepsilon_{33}^S \rho \omega^2 h^2 / (C_{33}^E \varepsilon_{33}^S + e_{33}^2),$$

$$\sigma_{xx}^{(s)} = C_{13}^E \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{31} \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{xx*}^{(s)}, \quad \sigma_{yy}^{(s)} = C_{13}^E \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{31} \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{yy*}^{(s)}, \quad (1.13)$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = C_{33}^E \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{33} \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{zz*}^{(s)}, \quad \sigma_{xz}^{(s)} = C_{44}^E \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{xz*}^{(s)}, \quad \sigma_{yz}^{(s)} = C_{44}^E \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{yz*}^{(s)},$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = \sigma_{xy*}^{(s)}, \quad D_x^{(s)} = e_{15} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial \zeta} + D_{x*}^{(s)}, \quad D_y^{(s)} = e_{15} \frac{\partial V^{(s)}}{\partial \zeta} + D_{y*}^{(s)},$$

$$D_z^{(s)} = e_{33} \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial \zeta} + D_{z*}^{(s)},$$

где

$$R_U^{(s)} = -\frac{1}{C_{44}^E} \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + C_{44}^E \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right],$$

$$R_V^{(s)} = -\frac{1}{C_{44}^E} \left[\frac{\partial \sigma_{yy}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(s-1)}}{\partial \xi} + C_{44}^E \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} + e_{15} \frac{\partial^2 \varphi^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right],$$

$$R_W^{(s)} = \frac{\varepsilon_{33}^S R_W^{*(s-1)} + e_{33} R_\varphi^{(s-1)}}{C_{33}^E \varepsilon_{33}^S + e_{33}^2}, \quad R_\varphi^{(s)} = -\frac{\partial D_x^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial D_y^{(s-1)}}{\partial \eta} - e_{31} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad (1.14)$$

$$R_W^{*(s)} = -\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-1)}}{\partial \eta} - C_{13}^E \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{xx*}^{(s)} = C_{11}^E \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + C_{12}^E \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_{yy*}^{(s)} = C_{12}^E \frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + C_{11}^E \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(s)} &= C_{13}^E \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad \sigma_{xz}^{(s)} = C_{44}^E \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi} + e_{15} \frac{\partial \varphi^{(s-1)}}{\partial \xi}, \\
\sigma_{yz}^{(s)} &= C_{44}^E \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{15} \frac{\partial \varphi^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_{xy}^{(s)} = \frac{1}{2} (C_{11}^E - C_{12}^E) \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \\
D_{xz}^{(s)} &= -\varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi^{(s-1)}}{\partial \xi} + e_{15} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \xi}, \quad D_{yz}^{(s)} = -\varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{15} \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
D_{zz}^{(s)} &= e_{31} \left(\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad Q^{(m)} \equiv 0, \quad Q_*^{(m)} \equiv 0 \quad \text{при } m < 0.
\end{aligned}$$

Решение краевой задачи. Общим решением системы разрешающих уравнений (1.12) будет

$$U^{(s)} = P_{1U}^{(s)}(\xi, \eta) \sin \alpha \zeta + P_{2U}^{(s)}(\xi, \eta) \cos \alpha \zeta + I_U^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (u, v, w; \alpha, \alpha, \beta), \quad (1.15)$$

$$\varphi^{(s)} = P_{1\varphi}^{(s)}(\xi, \eta) \zeta + P_{2\varphi}^{(s)}(\xi, \eta) + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} W^{(s)} + I_\varphi^{(s)}(\xi, \eta, \zeta),$$

где

$$I_\varphi^{(s)} = -\frac{1}{\varepsilon_{33}^S} \int_0^\zeta d\beta \int_0^\beta R_\varphi^{(s)}(\xi, \eta, \tau) d\tau,$$

$$I_U^{(s)}(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\zeta R_U^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \sin(\alpha - \tau) d\tau, \quad (u, v, w; \alpha, \alpha, \beta).$$

Общее решение (1.15), (1.16) содержит восемь функций интегрирования $P_{kj}^{(s)}$, $k=1,2$; $j=U,V,W,\varphi$ которые однозначно определяются после удовлетворения граничным условиям (1.1) при учете (1.6). Удовлетворив этим условиям для амплитуд компонентов вектора перемещения, получим:

$$P_{1U}^{(s)} = \frac{U^{+(s)}(\xi, \eta) - U^{-(s)}(\xi, \eta) - I_U^{(s)}(\zeta=1) + I_U^{(s)}(\zeta=-1)}{2 \sin \alpha} \quad (1.17)$$

$$P_{2U}^{(s)} = \frac{U^{+(s)}(\xi, \eta) + U^{-(s)}(\xi, \eta) - I_U^{(s)}(\zeta=1) - I_U^{(s)}(\zeta=-1)}{2 \cos \alpha}$$

$$U^{\pm(0)} = u_x^\pm / l, \quad U^{\pm(s)} \neq 0, \quad s \neq 0, \quad (u, v, w; \alpha, \alpha, \beta; x, y, z),$$

А для потенциала электрического поля получаем

$$\psi = \left(P_{1\varphi}^{(s)} \zeta + P_{2\varphi}^{(s)} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} W^{(s)} + I_\varphi^{(s)} \right) h, \quad (1.18)$$

где

$$P_{1\varphi}^{(s)} = \frac{V_0}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} (W^{(s)}(\zeta=1) - W^{(s)}(\zeta=-1)) + I_\varphi^{(s)}(\zeta=1) - I_\varphi^{(s)}(\zeta=-1) \right), \quad (1.19)$$

$$P_{2\varphi}^{(s)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} (W^{(s)}(\zeta=1) + W^{(s)}(\zeta=-1)) + I_\varphi^{(s)}(\zeta=1) + I_\varphi^{(s)}(\zeta=-1) \right).$$

На основе решения (1.17), (1.18) можно сделать важнейший вывод: в исходном приближении на значение потенциала электрического поля влияет

лишь нормальное перемещение. Отметим еще один примечательный факт – решение внутренней задачи (для слоя) полностью однозначно выражается через заданные в граничных условиях (1.1) функции.

2. Рассмотрим частный случай. Пусть

$$u_j^\pm(x, y) = \text{const}, \quad V_0(x, y) = \text{const}, \quad j = x, y, z.$$

При $s = 0$ будем иметь:

$$\begin{aligned} P_{1U}^{(0)} &= \frac{U^+ - U^-}{2 \sin \alpha}, \quad P_{1V}^{(0)} = \frac{V^+ - V^-}{2 \sin \alpha}, \quad P_{1W}^{(0)} = \frac{W^+ - W^-}{2 \sin \beta}, \quad P_{1\varphi}^{(0)} = \frac{V_0}{l} - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ - W^-), \\ P_{2U}^{(0)} &= \frac{U^+ + U^-}{2 \cos \alpha}, \quad P_{2V}^{(0)} = \frac{V^+ + V^-}{2 \cos \alpha}, \quad P_{2W}^{(0)} = \frac{W^+ + W^-}{2 \cos \beta}, \quad P_{2\varphi}^{(0)} = -\frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ + W^-) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U^{(0)} = \frac{U^+ \sin(1 + \zeta)\alpha + U^- \sin(1 - \zeta)\alpha}{\sin 2\alpha} (U, V, W; \alpha, \alpha, \beta),$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \left(\frac{V_0}{l} - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ - W^-) \right) \zeta - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ + W^-) + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S \sin 2\beta} (W^+ \sin(1 + \zeta)\beta + W^- \sin(1 - \zeta)\beta), \\ D_x^{(0)} &= \frac{e_{15}\alpha}{\sin 2\alpha} (U^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - U^- \cos(1 - \zeta)\alpha), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$D_y^{(0)} = \frac{e_{15}\alpha}{\sin 2\alpha} (V^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - V^- \cos(1 - \zeta)\alpha),$$

$$D_z^{(0)} = \frac{e_{33}}{2} (W^+ - W^-) - \frac{\varepsilon_{33}^S V_0}{l},$$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(0)} = \frac{C_{13}^E \beta}{\sin 2\beta} (W^+ \cos(1 + \zeta)\beta - W^- \cos(1 - \zeta)\beta) +$$

$$+ e_{31} \left(\left(\frac{V_0}{l} - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ - W^-) \right) + \frac{e_{33}\beta}{\varepsilon_{33}^S \sin 2\beta} (W^+ \cos(1 + \zeta)\beta - W^- \cos(1 - \zeta)\beta) \right),$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \frac{C_{33}^E \beta}{\sin 2\beta} (W^+ \cos(1 + \zeta)\beta - W^- \cos(1 - \zeta)\beta) +$$

$$+ e_{33} \left(\left(\frac{V_0}{l} - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (W^+ - W^-) \right) + \frac{e_{33}\beta}{\varepsilon_{33}^S \sin 2\beta} (W^+ \cos(1 + \zeta)\beta - W^- \cos(1 - \zeta)\beta) \right), \quad (2.3)$$

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \frac{C_{44}^E \alpha}{\sin 2\alpha} (U^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - U^- \cos(1 - \zeta)\alpha),$$

$$\sigma_{yz}^{(0)} = \frac{C_{44}^E \alpha}{\sin 2\alpha} (V^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - V^- \cos(1 - \zeta)\alpha), \quad \sigma_{xy}^{(0)} = 0.$$

Учитывая (1.11), (1.6) и (1.7) получим:

$$\bar{u}_x = u_x e^{i\alpha x} = U l e^{i\alpha x} = l e^{i\alpha x} \sum_{s=0}^N \varepsilon^s U^s \quad (x, y, z),$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi} e^{i\alpha x} = \phi h e^{i\alpha x} = h \varepsilon^{-1} e^{i\alpha x} \sum_{s=0}^N \varepsilon^s \phi^s = l e^{i\alpha x} \sum_{s=0}^N \varepsilon^s \phi^s, \quad (2.4)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} e^{i\omega t} = \varepsilon^{-1} e^{i\omega t} \sum_{s=0}^N \varepsilon^s \sigma_{xx}^s \quad (\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{xy}, x, y, z).$$

При $s > 0$ $U^s, V^s, W^s, \varphi^s = 0$, следовательно, имеем точное решение:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \frac{u_x^+ \sin(1 + \zeta)\alpha + u_x^- \sin(1 - \zeta)\alpha}{\sin 2\alpha} e^{i\omega t} (u, v, w, \alpha, \alpha, \beta, x, y, z), \\ \bar{\psi} &= \left(\left(V_0 - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (u_z^+ - u_z^-) \right) \zeta - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (u_z^+ + u_z^-) + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \frac{u_z^+ \sin(1 + \zeta)\beta + u_z^- \sin(1 - \zeta)\beta}{\sin 2\beta} \right) e^{i\omega t}, \\ \bar{D}_x &= \frac{e_{15}\alpha}{l \sin 2\alpha} (u_x^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - u_x^- \cos(1 - \zeta)\alpha) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\bar{D}_y = \frac{e_{15}\alpha}{l \sin 2\alpha} (u_y^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - u_y^- \cos(1 - \zeta)\alpha) e^{i\omega t},$$

$$\bar{D}_z = \frac{1}{l} \left(\frac{e_{33}}{2} (u_z^+ - u_z^-) - \varepsilon_{33}^S V_0 \right) e^{i\omega t},$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{1}{h} \left(\frac{C_{13}^E \beta}{\sin 2\beta} (u_z^+ \cos(1 + \zeta)\beta - u_z^- \cos(1 - \zeta)\beta) + \right. \\ &+ \left. e_{31} \left(\left(V_0 - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (u_z^+ - u_z^-) \right) + \frac{e_{33}\beta}{\varepsilon_{33}^S \sin 2\beta} (u_z^+ \cos(1 + \zeta)\beta - u_z^- \cos(1 - \zeta)\beta) \right) \right) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{1}{h} \left(\frac{C_{33}^E \beta}{\sin 2\beta} (u_z^+ \cos(1 + \zeta)\beta - u_z^- \cos(1 - \zeta)\beta) + \right. \\ &+ \left. e_{33} \left(\left(V_0 - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^S} (u_z^+ - u_z^-) \right) + \frac{e_{33}\beta}{\varepsilon_{33}^S \sin 2\beta} (u_z^- \cos(1 + \zeta)\beta - u_z^- \cos(1 - \zeta)\beta) \right) \right) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = \frac{C_{44}^E \alpha}{h \sin 2\alpha} (u_x^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - u_x^- \cos(1 - \zeta)\alpha) e^{i\omega t},$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{C_{44}^E \alpha}{h \sin 2\alpha} (u_y^+ \cos(1 + \zeta)\alpha - u_y^- \cos(1 - \zeta)\alpha) e^{i\omega t},$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = 0.$$

Институт механики НАН РА

Академик Л. А. Агаловян, Г. Л. Азатян, Р. С. Геворкян, А. М. Погосян

**Об асимптотическом решении пространственной динамической задачи для
прямоугольной пьезокерамической пластинки**

Асимптотическим методом решена динамическая трехмерная задача для предварительно поляризованной пьезокерамической пластинки. На лицевых

поверхностях заданы механические (компоненты вектора перемещения) и электрические (потенциал электрического поля) граничные условия. Установлена асимптотика напряжений, потенциала электрического поля и перемещений. Определено общее решение внутренней задачи. Получено точное решение частной задачи.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Գ. Լ. Ազատյան, Ռ. Ս. Գևորգյան, Հ. Մ. Պողոսյան

**Ուղղանկյուն պիեզակերամիկական սալի տարածական դինամիկական խնդրի
ասիմպտոտիկ լուծման մասին**

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծված է առաձգականության տեսության եռաչափ դինամիկական խնդիրը՝ նախապես բևեռացված պիեզակերամիկական սալի համար: Դիմային մակերևույթներում տրված են մեխանիկական (տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները) և էլեկտրական (էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը) եզրային պայմաններ: Գտնված է ասիմպտոտիկա լարումների թենզորի բաղադրիչների, էլեկտրական դաշտի պոտենցիալի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների համար, որը հնարավորություն է տվել, բավարարելով սալի դիմային մակերևույթներում տրված եզրային պայմանները, լիովին որոշել ներքին խնդրի լուծումը: Մասնավոր դեպքի համար, երբ արտաքին ազդեցությունները հաստատուն մեծություններ են, ստացված է ճշգրիտ լուծում:

Academician L. A. Aghalovyan, G. L. Azatyan, R. S. Gevorgyan, H. M. Poghosyan

**On Asymptotic Solution of the Dynamic 3D Problem for Rectangular Piezoceramic
Plate**

The solution of the dynamic 3D problem for rectangular piezoceramic plate, when displacements and potential of electrical field, are set on the faces of the plate is obtained by the asymptotic solution. The asymptotics of stresses, potential and displacements, determining the general solution of inner problem, is established. The exact solution of particular problem is obtained.

Литература

1. *Агаломян Л.А.* - Межвуз. сб. «Механика». Изд-во ЕГУ. 1982. Вып.2. С. 7-12.
2. *Агаломян Л.А.* - Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М. Наука. 1997. 414 с.
3. *Агаломян Л.А., Геворкян Р.С.* - Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван. Изд-во «Титутюн» НАН Армении. 2005. 468 с.

4. *Агаловян Л.А* - Изв. вузов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. N3. С. 8-11.
5. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. Киев. Наукова думка, 1989. 280 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М. Наука. 1982. 624 с.
7. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических электропроводных тел. М. Наука. 1988. 472 с.
8. *Рогачева Н.Н.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1981. Т. 34. N1. С. 55-64.
9. *Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А.* Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М. Едиториал УРСС. 2003. 366 с.