ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 111 2011 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Математические модели микрополярных упругих тонких балок*

(Представлено 3/IX 2010)

Ключевые слова: *микрополярный, упругий, балка, математические модели, свободное вращение, стесненное вращение, малая сдвиговая жесткость*.

Введение. В связи с современными проблемами микро- и наномеханики стало актуальным построение математических моделей тонких оболочек, пластин и балок на основе микрополярной (несимметричной, моментной) теории упругости, или иначе, континуума Коссера. Обзор работ в этом направлении за последний период приведен в [1,2].

Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок заключается в приближенном, но адекватном сведении трехмерной или двумерной краевой задачи микрополярной теории упругости соответственно к некоторой двумерной или одномерной задаче. Для достижения этой цели уместно использование асимптотического метода интегрирования краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких пространственных или двумерных областях [3-6]. Принимая за основу качественные результаты исходного приближения асимптотического решения трехмерной или двумерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, можем сформулировать (с точки зрения приложений в инженерной практике) достаточно общие гипотезы [7-9], которые позволяют свести трехмерную или двумерную задачу соответственно к прикладной двумерной или одномерной задаче для микрополярных оболочек и пластин или балок.

* Доложено на 12-м Международном конгрессе по мезомеханике. Тайпей, Тайвань, 21-15 июня 2010 г.

В данной работе при помощи такого подхода, в зависимости от значений безразмерных физических параметров балки, построены общие модели микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением; со стесненным вращением; “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

1. Постановка задачи. Основные уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости со свободным вращением имеют следующий вид [10]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0,\ \frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}-\left(\sigma_{13}-\sigma_{31}\right)=0; \tag{1.1}$$

физико-геометрические соотношения

$$\begin{gathered}\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}-\nu\sigma_{33}\right),\quad \gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31},\\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{33}-\nu\sigma_{11}\right),\quad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{31}-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{13},\\ \chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}=\frac{1}{B}\mu_{32},\quad \chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}=\frac{1}{B}\mu_{12}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ – тензоры силового и моментного напряжений; $\hat{\gamma},\chi$ – тензоры деформаций и изгибов-кручений; $\vec{V}$ – вектор перемещений, $\vec{\omega}$ – вектор свободного поворота; E,ν,α,B – упругие постоянные микрополярного тела. Систему уравнений (1.1), (1.2) будем рассматривать в тонкой прямоугольной области: $0\le x_1\le a,\quad -h\le x_3\le h$, где $2h$ – высота, a – длина прямоугольника.

На лицевых линиях прямоугольника $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем рассматривать задачу изгиба)

$$\sigma_{31}=\tilde{q}_1,\quad \sigma_{33}=\pm\tilde{q}_3,\quad \mu_{32}=\pm\tilde{m}_2,\ \text{при}\ x_2=\pm h. \tag{1.3}$$

Граничные условия на кромках прямоугольника $\left(x_1=0,\ x_1=a\right)$ в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

При построении асимптотики краевой задачи (1.1)-(1.3) в тонкой прямоугольной области (следовательно, для построения моделей микрополярных балок) большую роль играют значения физических констант материала балки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{\mu}{\alpha}, \quad \frac{a^2\mu}{B} \tag{1.4}$$

(здесь длина прямоугольника a играет роль масштабного фактора).

2. Модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением. Рассмотрим случай, когда параметры (1.4) имеют значения

$$\frac{\mu}{\alpha} \sim 1 \quad (\text{т.е. } \alpha \sim \mu), \quad \frac{a^2\mu}{B} \sim 1. \tag{2.1}$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых задач (1.1)-(1.3) в тонкой прямоугольной области [3], при значениях физических безразмерных параметров (2.1), позволяют ставить в основу построения прикладной одномерной модели микрополярных балок со свободным вращением следующие достаточно общие гипотезы:

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений V_1, V_3 и свободного поворота ω_2 по толщине прямоугольника:

$$V_3 = w(x_1), \quad V_1 = x_3\psi(x_1), \; \omega_2 = \Omega_2(x_1), \tag{2.2}$$

где w – прогиб балки, Ω_2 – угол свободного поворота, ψ – полный угол поворота нормального элемента.

В смысле перемещений приведенная гипотеза представляет собой известную классическую кинематическую гипотезу Тимошенко [11] в уточненной теории упругих балок, поэтому гипотезу (2.2) назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных балок;

б) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31}(x_1). \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, значение σ_{31} окончательно определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1.1), для которого потребуем, чтобы усредненная по толщине прямоугольника величина была равна нулю. Силовая часть принятой здесь гипотезы (т.е. гипотезы б)) отличается от соответствующей гипотезы Тимошенко в классическом случае [11].

Отметим, что построенная ниже на основе гипотез а), б) теория микрополярных упругих тонких балок будет асимптотически точной теорией.

Основная система уравнений изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок со свободным вращеним выражается следующим образом:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{13}}{dx_1}=-2\tilde{q}_3\,,\quad N_{31}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=2h\tilde{q}_1,\quad \frac{dL_{12}}{dx_1}+N_{31}-N_{13}=-2\tilde{m}_2\,; \tag{2.4}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered} N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}],\quad N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}], \\ M_{11}=\frac{2Eh^3}{3}K_{11}+\nu\frac{2h^2}{3}\tilde{q}_3,\quad L_{12}=2Bh\kappa_{12}; \end{gathered} \tag{2.5}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{dw}{dx_1}+\Omega_2,\quad \Gamma_{31}=\psi-\Omega_2,\quad K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\ \ \kappa_{12}=\frac{d\Omega_2}{dx_1}\,. \tag{2.6}$$

Здесь N_{13},N_{31} – усилия, M_{11},L_{12} – изгибающие моменты от силовых и моментных напряжений, Γ_{13},Γ_{31} – деформации сдвига, K_{11},κ_{12} – изменения кривазны оси балки.

Система уравнений изгибной деформации микрополярно-упругих балок (2.4)-(2.6) представляет собой систему уравнений шестого порядка, в которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это система из 11 уравнений относительно 11 неизвестных функций: $w,\psi,\Omega_2,\Gamma_{13},\Gamma_{31},K_{11},\kappa_{12},N_{13},N_{31},M_{11},L_{12}$.

«Смягченные» граничные условия на торце балки (например, на $x_1=0$) имеют вид

$$M_{11}=M_{11}^*\ \text{или}\ \psi=\psi^*,\ N_{13}=N_{13}^*\ \text{или}\ w=w^*,\ L_{12}=L_{12}^*\ \text{или}\ \Omega_2=\Omega_2^*. \tag{2.7}$$

Исходя из принципа Даламбера, если в уравнение равновесия (2.4) включить соответственно силу инерции $2\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ и моменты инерции $\dfrac{2h^3}{3}\rho\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, $2Jh\dfrac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}$, получим модель динамической теории изгиба микрополярных упругих балок со свободным вращением.

Если в модели микрополярных балок (2.4)-(2.7) условно принять $\alpha=0$, то можно выделить классическую модель упругих тонких балок Тимошенко [11,12] (с некоторым отличием, связанным со статической гипотезой б)).

Если в модели (2.4)-(2.7) микрополярных балок пренебречь поперечными сдвигами, т.е. считать

$$\psi=-\frac{dw}{dx_1}\,, \tag{2.8}$$

то придем к модели микрополярных балок со свободным вращением, когда нормальный элемент поворачивается, оставаясь перпендикулярным к деформированной оси балки. Формула (2.8) означает, что, пренебрегая поперечными сдвигами, вместо обобщенной кинематической гипотезы а) Тимошенко мы руководствуемся обобщенной гипотезой Бернулли для микрополярных балок (т.е. наряду с (2.8) считаем справедливыми формулы (2.2) в целом).

Основная система изгибной деформации микрополярных упругих балок со свободным вращением, если исходить из обобщенной кинетической гипотезы Бернулли, будет представлена уравнениями равновесия (2.4) и физико-геометрическими соотношениями (2.5), (2.6) относительно $M_{11}, L_{12}, K_{11}, k_{12}$, к которым следует присоединить следующие соотношения:

$$N_{13} - N_{31} = 4\alpha h(\Gamma_{13} - \Gamma_{31}), \quad \Gamma_{13} - \Gamma_{31} = 2\left(\frac{dw}{dx_1} + \Omega_2\right). \tag{2.9}$$

К указанной системе уравнений необходимо присоединить граничные условия (2.7) с учетом (2.8).

3. Модель микрополярных балок “с малой сдвиговой жесткостью”. Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (1.4) имеют значения

$$\alpha \sim \mu, \ \frac{\alpha a^2}{B} << 1. \tag{3.1}$$

Качественные стороны результата интегрирования краевой задачи (1.1)-(1.3) плоской микрополярной теории упругости для случая (3.1) в тонкой прямоугольной области позволяют положить в основу построения соответствующей прикладной одномерной теории микрополярных балок следующие гипотезы: 1) принимаются предположения а), б) раздела два; 2) в третьем уравнении равновесия (1.1) можем пренебречь разностью силовых напряжений $(\sigma_{13} - \sigma_{31})$, но сохранить ее в физических уравнениях (1.2).

В этом случае как по обобщенной кинематической гипотезе Тимошенко, так и по обобщенной гипотезе Бернулли “моментная часть” задачи (уравнения и граничные условия) отделяется от “силовой части” задачи (т.к. в третьем уравнении равновесия из (2.4) разностью $N_{31} - N_{13}$ пренебрегается).

Отметим, что в этом случае “силовая часть” задачи, даже при $\Omega_2(x_1) \equiv 0$, не будет совпадать с классической теорией упругих балок (с учетом и без учета поперечных сдвигов), т.к. в соответствующих уравнениях присутствуют члены с физической постоянной α. Имея в виду условие (3.1), эту модель микрополярных балок назовем моделью “с малой сдвиговой жесткостью” (учитывая, что физическая постоянная α тоже своего рода модуль сдвига, как и классический модуль μ).

4. Модель микрополярных балок со стесненным вращением. Рассмотрим случай, когда для физических параметров (1.4) имеют место следующие условия:

$$\alpha >> \mu\,,\ \ \frac{\alpha a^2}{B} \sim 1\,. \tag{4.1}$$

Как показывает асимптотический анализ [3] краевой задачи (1.1)-(1.3), для случая (4.1) поворот ω_2 в асимптотических приближениях выражается через компоненты вектора перемещений V_1 и V_3 формулой, идентичной формуле плоской задачи классической теории упругости:

$$2\omega_2 = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\,. \tag{4.2}$$

Это означает, что в этом случае изучаемый вопрос находится в области микрополярной упругости со стесненным вращением [10] (иначе – псевдоконтинуума Коссера).

С учетом качественных сторон [3] асимптотического решения краевой задачи (1.1)-(1.3) в случае (4.1) в основу построения прикладной одномерной модели микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением положим следующие гипотезы: 1) предположения а), б) раздела два; 2) условие стесненного вращения (4.2).

Основная система уравнений прикладной одномерной теории микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением, в которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации, выражается следующим образом:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{13}}{dx_1} = -2\tilde{q}_3\,, \quad N_{31} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = 2h\tilde{q}_1, \quad \frac{dL_{12}}{dx_1} + N_{31} - N_{13} = -2\tilde{m}_2\,; \tag{4.3}$$

физические соотношения

$$N_{13} + N_{31} = 4\mu h(\Gamma_{13} + \Gamma_{31}), \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}K_{11} + \nu\frac{2h^2}{3}\tilde{q}_3, \quad L_{12} = 2Bh\kappa_{12}\,; \tag{4.4}$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} + \Gamma_{31} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{12} = \frac{d\Omega_2}{dx_1}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{dw}{dx_1}\right). \tag{4.5}$$

К системе уравнений (4.3)-(4.5) следует присоединить граничные условия (2.7).

В уравнениях (4.3)-(4.5), пренебрегая моментными напряжениями, в данной модели микрополярных балок перейдем к классической модели балки Тимошенко [11,12] (здесь также с некоторым отличием, связанным со статической гипотезой б)).

Если в уравнениях (4.3)-(4.5) пренебречь поперечными сдвигами (т.е. принять формулу (2.8)), получим модель микрополярных балок со стесненным вращением на основе обобщенной кинематической гипотезы Бернулли:

уравнения равновесия

$$\frac{dN_{13}}{dx_1} = -2\widetilde{q}_3, \quad \frac{d\left(M_{11} + L_{12}\right)}{dx_1} - N_{13} = -2h\widetilde{q} - 2\widetilde{m}_2; \tag{4.6}$$

физические соотношения

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3} K_{11} + \nu \frac{2h^2}{3} \widetilde{q}_3, \quad L_{12} = 2Bh\chi_{12}; \tag{4.7}$$

геометрические соотношения

$$K_{11} = -\frac{d^2 w}{dx_1^2}, \quad \kappa_{12} = \frac{d\Omega_2}{dx_1}, \quad \Omega_2 = -\frac{dw}{dx_1}. \tag{4.8}$$

К системе уравнений (4.6)-(4.8) следует присоединить следующие граничные условия (при $x_1 = 0$):

$$M_{11} + L_{12} = M_{11}^* + L_{12}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \; N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*. \tag{4.9}$$

Систему уравнений микрополярной балки (4.6)-(4.8) без учета поперечного сдвига можем привести к следующему уравнению относительно w (типа классического уравнения изгиба балки):

$$D^* \frac{d^4 w}{dx_1^4} = 2\widetilde{q}_3 + \frac{2h^2}{3} \nu \frac{d^2 \widetilde{q}_3}{dx_1^2} + 2\frac{d\widetilde{m}_2}{dx_1} + 2h\frac{d\widetilde{q}_1}{dx_1}, \tag{4.10}$$

где

$$D^* = D + 2Bh, \; D = \frac{2Eh^3}{3}, \tag{4.11}$$

D^* – жесткость микрополярной упругой балки, D – классическая жесткость упругой балки.

Отметим, что модель микрополярной балки со стесненным вращением (4.6)-(4.9) построена ранее в работе [13], а асимптотическим методом – в работе [3].

Гюмрийский государственный педагогический
университет им. М.Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Математические модели микрополярных упругих тонких балок

На основе асимптотически подтвержденного метода гипотез, в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены общие прикладные одномерные модели микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”, для которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ հեծանների մաթեմատիկական մոդելները

Ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա, կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրի ընդունած արժեքներից, կառուցված են միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «փոքր սահքային կոշտությամբ» կիրառական միաչափ ընդհանուր մոդելները, որոնց դեպքում լիովին հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային և նմանատիպ ծագումով մյուս դեֆորմացիաները:

Correspondent member of NAS RA S. H. Sargsyan

Mathematical Models of Micropolar Thin Elastic Bars

The general applied one-dimensional models of micropolar thin elastic bars with independent rotation, constraint rotation and with «small shift rigidity» are constructed depending on the values of sizeless physical parameters. In case of these models lateral shift and other related deformations are completely taken into account. The construction of the mentioned models is based upon the hypothesis method having asymplotical confirmation.

Литература

1. *Саркисян С.О.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. N2. С. 84-94.
2. *Altenbach I., Altenbach H., Eremeyev V.* - Arch. Appl. Mech. Special Issue. Doi 10. 1007/ s. 00419-009-0365-3.
3. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. N5. С. 41-54.
4. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.
5. *Саркисян С. О.* - Доклады НАН Армении. 2008. Т. 108. N 4. С. 309-319.
6. *Sargsyan S.H.* - Journal of Thermal Stresses. 2009. V. 32. N8. P. 791-818.
7. *Саркисян С.О.* - Вестник Пермского гос. тех. ун-та “Математическое моделирование систем и процессов”. 2008. N 16. С. 111-120.
8. *Саркисян С.О.* - Доклады АН России. 2010.Т.435. N3.
9. *Sargyan S.H.* - Proceed. of the 16th US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics. USNCTAM 2010. June 27-July 2. 2011. State College, PA, USA.
10. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М. Наука. 1984. 256 с.
11. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Наука. 1967. 444 с.
12. *Уфлянд Я.С.* - ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 289-300.
13. *Винокуров Л.П., Деревянко Н.И.* - Прикл. механика. 1966. Т.2. N 3. С. 72-79.