ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 111 2011 № 2

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 621.39.1:519.34

С. Н. Манукян

Классификация многомерных арифметических множеств, представимых в системе М.Пресбургера

(Представлено академиком Ю. Г. Шукуряном 5/IX 2010)

Ключевые слова: *предикат, конъюнкция, дизъюнкция, квантор, проекция, проектирование, транзитивное замыкание*

1. Введение. В [1] представлена классификация двумерных арифметических множеств, представимых в системе М.Пресбургера (точные определения будут даны ниже). В связи с работой [1] профессор Патрик Сежильски поставил вопрос о том, возможно ли обобщение построенной классификации на множества любых размерностей. В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос, а именно, строится классификация, аналогичная классификации, рассматриваемой в [1], но относящаяся к множествам любых размерностей. При этом обнаруживаются такие свойства указанной классификации, которые отличают ее от классификации, построенной в [1]. Обнаруживаются также свойства рассматриваемой классификации, позволяющие в определенном смысле сравнить возможности операций проектирования и транзитивного замыкания множеств.

2. Дадим определения некоторых понятий, используемых в дальнейшем.

Как обычно, *арифметическим множеством* размерности n будем называть множество систем $(x_1, x_2, .x_n)$, элементы которых суть натуральные числа $0, 1, 2, \ldots$ Множество всех систем указанного вида обозначаем посредством N^n; вместо N^1 пишем N. *Арифметическим предикатом* размерности n, как обычно, называем предикат, заданный на N^n. Говорим, что арифметический предикат P размерности n является *представляющим предикатом* для множества $A \subseteq N^n$ (а также что A является *множеством истинности* для P), если значение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ есть "истина" в том и только том случае, когда $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$.

Понятие *предикатной формулы* на основе логических операций $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ определяется обычным образом [2-4]. Все понятия, относящиеся к предикатным формулам (в том числе понятие *терма*), определяются так же, как в [2-4]. *Сигнатурой*, как обычно, называем любое множество символов констант, предикатных символов, функциональных символов.

Говорим, что формула F *принадлежит* данной сигнатуре Γ (или является *формулой данной сигнатуры* Γ), если все встречающиеся в F символы констант, предикатные и функциональные символы принадлежат Γ. *Сигнатурой М. Пресбургера* называем сигнатуру $\{0, =, ', +\}$. *Стандартная арифметическая интерпретация* (или просто *стандартная интерпретация)* формул в сигнатуре $\{0, =, ', +\}$ определяется обычным образом [2-4]. (Например, x' интерпретируется как $x + 1$.) Говорим, что арифметический предикат *выразим* в системе M. Пресбургера, если он задается посредством стандартной интерпретации некоторой формулы в сигнатуре $\{0, =, ', +\}$. Говорим, что арифметическое множество A *задается* формулой F, если его представляющий предикат задается посредством стандартной интерпретации формулы F. Говорим, что множество A *логически представимо* (или просто *представимо*) в системе М. Пресбургера, если оно задается некоторой формулой в сигнатуре $\{0, =, ', +\}$. Дедуктивная система М.Пресбургера определяется обычным образом [5-7]. Говорим, что формулы F и G сигнатуры $\{0, =, ', +\}$ (соответственно, термы t и s той же сигнатуры) *эквивалентны* в системе М. Пресбургера, если формула $(F \supset G)\&(G \supset F)$ (соответственно, $t = s$) выводима в этой системе. Как правило, в дальнейшем формулы и термы в системе М. Пресбургера рассматриваются с точностью до их эквивалентности.

Термины "примитивно-рекурсивная функция", "частично-рекурсивная функция" будем сокращенно обозначать посредством ПРФ и ЧРФ.

Введем в рассмотрение некоторые конкретные арифметические множества и операции над арифметическими множествами. Множества Z_0, R, Q_1, Q, E, Add, G_k при $k \geq 1$ определяются следующим образом:

$$Z_0 = \{x|x = 0\},\ R = \{(x, y)|y = x + 1\},\ Q_1 = \{(x, y)|x \leq y\},\ Q = \{(x, y)|x < y\},$$

$$E = \{(x, y)|x = y\},\ Add = \{(x, y, z)|x + y = z\}, G_k = \{(x, y)|xy(\mathrm{Mod}\, k)\}.$$

Лемма 2.1. *Множества $Z_0, R, Q_1, Q, E, N, N^n$ при $n \geq 1$, Add, G_k при $k \geq 1$ представимы в системе М. Пресбургера (ср. [5 - 7]).*

Операции $\cup, \cap, \times, \downarrow_i, T_{ij}$ над арифметическими множествами определяются так же, как в [8,9] (ср. также [10]).

Алгебра θ^0 арифметических множеств (ср. [8, 9]) определяется как алгебра с базисными элементами Z_0, R, Add и операциями $\cup, \cap, \times, \downarrow_i, T_{ij}$. Говорим, что множество A *индуктивно представимо* в алгебре θ^0, если оно может быть получено из Z_0, R, Add при помощи операций $\cup, \cap, \times, \downarrow_i, T_{ij}$.

Следующая теорема приведена в [8] (в несколько иных терминах).

Теорема 2.1. *Арифметическое множество представимо в системе М. Пресбургера в том и только том случае, когда оно индуктивно представимо в алгебре θ^0.*

В доказательстве этой теоремы существенную роль играет следующая лемма (используемая также и в дальнейшем изложении).

Лемма 2.2. *Всякий терм в системе М. Пресбургера может быть приведен к виду $n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k+\overline{q}$; здесь выражение n_ix_i означает $(x_i+x_i+x_i+\ldots+x_i)$, где слагаемое x_i повторяется n_i раз; $\overline{q}$ означает терм $0^{''\cdots'}$, в котором символ $'$ повторяется q раз. Всякий предикат, выразимый в системе М.Пресбургера, может быть задан формулой, получаемой посредством применения V и & к формулам вида $(t < s)$ и $(t \equiv s)(\mathrm{Mod}\, m)$, где t и s — термы указанного выше вида, m — натуральная константа, $m \geq 1$.*

Эта лемма фактически доказана (в несколько иных терминах) в [2, 5-7].

Формулу вида $t < s$ или $(t \equiv s)(\mathrm{Mod}\, m)$ называем *приведенной*, если она удовлетворяет следующим условиям: (1) никакая предметная переменная не входит одновременно в термы t и s; (2) слагаемое вида $0^{''\cdots'}$, отличное от нуля, входит либо только в t , либо только в s. Легко видеть, что для всякой формулы вида $t < s$ или $(t \equiv s)(\mathrm{Mod}\, m)$ существует эквивалентная ей приведенная формула того же вида.

3. Введем теперь классификацию арифметических множеств любых размерностей, представимых в системе М.Пресбургера. Следуя [1], рассмотрим монотонную последовательность $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$, состоящую из всех простых чисел, и определим Π_n при $n \geq 0$ как класс натуральных чисел, в разложении которых на простые множители отсутствуют простые числа, отличные от $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$.Таким образом, в класс Π_0 входит лишь число 1; класс Π_1 состоит из чисел вида 2^n и т.д. Определим при $n \geq 0$ класс Σ_n как класс арифметических множеств, представляющие предикаты которых выражаются в форме, указанной в лемме 2.2, причем все подформулы вида $t < s$ и $(t \equiv s)(\mathrm{Mod}\, m)$, участвующие в представлении этих предикатов, являются приведенными и обладают следующими свойствами: коэффициенты $n_1, n_2, \ldots, n_k$ в представлении термов t и s в виде $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k + \overline{q}$, а также число m принадлежат Π_n. Посредством Δ_n обозначим класс двумерных арифметических множеств, принадлежащих Σ_n. Легко видеть, что классы Δ_n, определенные указанным образом, совпадают с классами Δ_n, рассматриваемыми в [1].

Лемма 3.1. *(а) $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ при любом n. (б) Объединение всех Σ_n при $n = 0, 1, 2, \ldots$ совпадает с классом всех множеств, представимых в системе М.Пресбургера. (в) Операции $\cup, \cap, \times, T_{ij}$ сохраняют принадлежность каждому классу Σ_n.*

Из леммы 3.1 следует, что операция проектирования $\downarrow_i$, вообще говоря, не должна сохранять принадлежность классу Σ_n. Однако в одном частном случае подобное обстоятельство все же имеет место, как показывает следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если $A \in \Delta_n$, то проекция множества A по любой из его двух координат принадлежит Σ_n.*

Множество M натуральных чисел назовем *смешанно-периодическим* (ср. [2]), если существуют такие натуральные числа a и b, что при любом $x \geq a$ $x \in M$ имеет место в том и только в том случае, когда $x + b \in M$. Число b в этом случае называем *периодом* множества M. Если $a = 0$, то M называем *чисто периодическим.*

Лемма 3.3 (ср. [2]). *Каждое одномерное множество $A \in \Sigma_n$ является смешанно-периодическим с периодом, принадлежащим Π_n.*

Лемма 3.4. *$\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ при любом n.*

Из лемм 3.1-3.4 вытекает, что основные свойства классификации $\Delta_0 \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ сохраняются и для классификации $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$. Отметим, однако, некоторые различия между ними. В [1] приведена следующая теорема: $A \in \Delta_0$ в том и только том случае, когда A задается формулой в сигнатуре $\{0, =, <, '\}$.

Это утверждение не имеет места для класса Σ_0. А именно, очевидно, что $Add \in \Sigma_0$, однако справедлива следующая лемма (доказанная в [2]).

Лемма 3.5. *Множество Add не может быть задано формулой в сигнатуре* $\{0, =, <, '\}$.

Вопрос об исчерпывающей характеристике класса Σ_0 требует дальнейшего исследования.

4. В этом разделе рассматриваются некоторые свойства введенной классификации в связи с операцией транзитивного замыкания множеств.

Пусть A — арифметическое множество четной размеренности $2n$. *Транзитивным замыканием* множества A будем называть множество ${}^*A$, определяемое следующими порождающими правилами (ср. [9,10]):

(1) если $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in A$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \in {}^*A$;

(2) если $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in {}^*A$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in {}^*A$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in {}^*A$.

Понятие *креативного* арифметического множества определяется так же, как в [11,12]. Двумерное множество B называем креативным, если креативно множество $A = \{c(x,y)|(x,y) \in B\}$ (здесь c есть ПРФ, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между N и N^2, например, $c(x,y) = 2^x(2y+1)-1$).

Теорема 4.1. *Существует множество $A \in \Delta_4$, транзитивное замыкание которого креативно.*

Доказательство основывается на рассмотрении *операторных алгоритмов* в том виде, как они определены в [12,13].

Мы можем сказать, таким образом, что существует класс рекурсивных множеств (например, класс множеств, представимых в системе М. Пресбургера) такой, что операция проектирования не выводит за пределы этого класса, однако операция транзитивного замыкания, исходя из множеств этого класса, приводит иногда к нерекурсивным (даже креативным) множествам. Таким образом, операция транзитивного замыкания оказывается в определенном смысле более сильной по сравнению с операцией проектирования. Вопрос о том, какие классы множеств обладают свойством, указанным для класса Δ_4 в теореме 4.1 (в частности, вопрос о том, обладают ли этим свойством классы $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), требует дальнейшего исследования.

Автор приносит глубокую благодарность профессору Патрику Сежильски за постановку задачи и внимание к работе.

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

С. Н. Манукян

Классификация многомерных арифметических множеств, представимых в системе М.Пресбургера

Строится последовательность классов $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$, объединение которых совпадает с классом многомерных арифметических множеств, представимых в системе М. Пресбургера. Устанавливаются некоторые свойства построенной классификации, отличающие ее от аналогичной классификации двумерных множеств. Доказывается, что существует двумерное множество $A \in \Sigma_4$, транзитивное замыкание которого креативно.

Ս. Ն. Մանուկյան

Մ.Պրեսբուրգերի համակարգում ներկայացվող բազմաչափանի թվաբանական բազմությունների դասակարգումը

Կառուցվում է $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$ դասերի հաջորդականություն, որոնց միացումը համընկնում է Մ.Պրեսբուրգերի համակարգում ներկայացվող բազմաչափանի թվաբանական բազմությունների դասի հետ: Ստացվում են այդ դասակարգման որոշ հատկություններ, որոնցով այն տարբերվում է երկչափանի բազմությունների համանման դասակարգումից: Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի $A \in \Sigma_4$ երկչափանի բազմություն, որի տրանզիտիվ փակումը կրեատիվ է:

S. N. Manukian

Classification of Many-Dimensional Arithmetical Sets Represented in M. Presburger's System

A sequence of classes $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots$ is constructed so that their union coincides with the class of many-dimensional arithmetical sets represented in M. Presburger's system. Some properties of this classification are established which are different from the properties of analogous classification of two-dimensional sets. It is proved that there exists a two-dimensional set $A \in \Sigma_4$, such that its transitive closure is creative.

Литература

1. *Manukian S.N.* - Proceedings of the Conference "Computer Science and Information Technologies", CSIT-05. Yerevan. 2005. P.86-87.

2. *Enderton H.* A Mathematical Introduction to Logic, 2nd ed., San Diego, Harcourt, Academic Press, 2001.

3. *Kleene S.C.* Introduction to Metamathematics. D. Van Nostrand Comp., Inc., New York-Toronto, 1952.

4. *Mendelson E.* Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand Comp., Inc., Princeton, New Jersey-Toronto-New York-London, 1964.

5. *Hilbert D., Bernays P.* Grundlagen der Mathematik, Band 1. Zweite Auflage, Berlin- Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968.

6. *Presburger M.* - Comptes Rendu du I Congres des Mathematiciens des Pays Slaves, Warszawa. 1930. P.92-101.

7. *Stransifer R.* Presburger's Article on Integer Arithmetics: Remarks and Translation. Department of Computer Science, Cornell University, Ithaca, New York, 1984.

8. *Manukian S.N.* - Proceedings of the Conference "Computer Science and Information Technologies", CSIT-09. Yerevan. 2009. P. 51-53.

9. *Манукян С.Н.* - Труды ИПИА НАН РА и ЕрГУ, "Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники". 1997. Т. 17. С. 86-91.

10. *Цейтин Г.С.* - Труды МИАН СССР. 1964. Т. 72. С. 69-98.

11. *Rogers H.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability McGraw Hill Book Comp. New York- St.Louis- San Francisco-Toronto-London-Sydney.1967.

12. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М. Наука, 1986.

13. *Minsky M.I.* - Ann. of Mathem. 1961. V. 74. P. 437-455.