ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 111 2011 № 1

МЕХАНИКА

УДК 539.3

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

О дестабилизирующем влиянии конструкционного трения на устойчивость пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенных инерционных моментов на кромках

(Представлено академиком Г. Е. Багдасаряном 9/IV 2010)

Ключевые слова: *устойчивость неконсервативных систем, конструкционное трение, сосредоточенные моменты, сверхзвуковое обтекание, панельный флаттер*

Своеобразное влияние диссипативных сил на устойчивость распределенных неконсервативных систем представляет большой теоретический и практический интерес [1-7]. Это особенно касается расхождения между результатами, относящимися к системам с исчезающе малым затуханием, и к системам, затухание в которых с самого начала предполагалось равным нулю.

Одно из проявлений своеобразного влияния исчезающе малого трения на устойчивость неконсервативных систем — скачкообразное падение критической нагрузки и частоты, а в случае обтекаемой потоком газа панели — критической скорости. Это явление, получившее название "парадокс дестабилизации", впервые было отмечено Г. Циглером [6] на примере двойного математического маятника, нагруженного на свободном конце "следящей" силой. Впоследствии эффект дестабилизации был обнаружен во многих механических и физических задачах. В.В. Болотин обнаружил зависимость устойчивости при исчезающе малом трении от соотношения между парциальными коэффициентами затухания и показал, что эффект дестабилизации отсутствует лишь при одинаковых парциальных коэффициентах затухания [1]. И.И. Жинжером [5] проведено общее исследование эффекта дестабилизации в неконсервативных системах вследствие исчезающе малого трения. Стройная теория для неконсервативных систем, качественно и количественно описывающая их парадоксальное поведение под влиянием малого внутреннего и внешнего трения, изложена в [8,9]. Более или менее полное исследование эффекта дестабилизации, обусловленного влиянием реальных законов конструкционного трения на устойчивость неконсервативных систем, с точки зрения охвата интерпретирующих их моделей, проведено в работе [7] на примере консольной балки, нагруженной "следящей" силой.

Однако общие свойства этих систем исчерпывающе еще не изучены.

В данной работе на примере шарнирно опертой вдоль длинных кромок тонкой упругой удлиненной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, исследуется эффект дестабилизации при различных моделях конструкционного трения в шарнирах в предположении наличия на закрепленных кромках сосредоточенных инерционных моментов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую удлиненную пластинку, которая в декартовой системе координат занимает область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Предполагается, что одна из длинных кромок $x = 0$ имеет неподвижное шарнирное опирание, а другая $x = l$ — свободное шарнирное опирание. Две другие кромки $y = 0$, $y = b$ свободны. Пластинка обтекается с одной стороны в направлении оси Ox сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью V.

В целях упрощения будем полагать, что распределенная масса пластинки и силы сопротивления пренебрежимо малы. Тогда, в предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и поршневой теории, уравнение малых изгибных колебаний около невозмущенной формы равновесия имеет вид [1,3]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ w = w(x,t),\ s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}, \tag{1.1}$$

где $w = w(x,t)$ — функция прогиба точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 — плотность невозмущенного потока газа; a_0 — скорость звука в невозмущенной газовой среде; D — цилиндрическая жесткость на изгиб.

Будем полагать, что шарниры обладают вязкоупругими свойствами, а на шарнирно опертых кромках $x = 0$, $x = l$ приложены сосредоточенные инерционные моменты I_1, I_2 соответственно. При этом, учитывая реальные законы конструкционного трения, возникающего в шарнирах, граничные условия запишутся в виде [1,3,10]

$$\begin{aligned} &w = 0,\ D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \delta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t},\ x = 0, \\ &w = 0,\ D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \delta_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t},\ x = l. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ε_1, ε_2, δ_1, δ_2 — коэффициенты, характеризующие конструкционное трение в шарнирах [3,10].

Отыскивая решение задачи (1.1), (1.2) в виде $w(x,t) = f(x)\exp(\lambda t)$, приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$f^{IV} + s^3 f' = 0,\ s^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}; \tag{1.3}$$

$$f = 0,\ f'' = \alpha_1\lambda^2 f' + \beta_1\lambda f' - \gamma_1\lambda f'',\ x = 0, \tag{1.4}$$

$$f = 0,\ f'' = -\alpha_2\lambda^2 f' - \beta_2\lambda f' - \gamma_2\lambda f'',\ x = l,$$

$$\alpha_i = I_i D^{-1},\ \beta_i = \varepsilon_i D^{-1},\ \gamma_i = \delta_i D^{-1};\ \alpha_i \succ 0,\ \beta_i \succ 0,\ \gamma_i \succ 0,\ i = 1,2. \tag{1.5}$$

Подставляя общее решение уравнения (1.3)

$$f(x) = C_1 + C_2\exp(-sx) + C_3\exp(sx/2)\cdot\cos(sx\sqrt{3}/2) + C_4\exp(sx/2)\cdot\sin(sx\sqrt{3}/2) \tag{1.6}$$

в граничные условия (1.4), получаем однородную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно произвольных постоянных C_i, $i = 1,2,3,4$, одновременно не равных нулю. Далее, приравнивая нулю определитель этой системы, получаем алгебраическое уравнение четвертой степени относительно собственного значения λ, которое в безразмерных переменных в предположении $\alpha_1 \neq 0$ $(I_1 \neq 0)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\chi A(r)\mu_1^4 + ((\chi\beta_{11} + \beta_{12})A(r) + (\chi\gamma_{11} + \gamma_{12})rB(r))\mu_1^3 + ((1 + \chi + \beta_{11}\gamma_{12} + \\ + \beta_{12}\gamma_{11})rB(r) + \beta_{11}\beta_{12}A(r) + \gamma_{11}\gamma_{12}r^2C(r))\mu_1^2 + ((\beta_{11} + \beta_{12}rB(r) + \\ + (\gamma_{11} + \gamma_{12})r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r))\mu_1 + r^2C(r) = 0,\ \chi \in [0,\infty),\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\chi = \alpha_2\alpha_1^{-1},\ r = sl; \tag{1.8}$$

$$\mu_1 = \lambda\sqrt{\alpha_1 l};\beta_{11} = \beta_1\sqrt{\alpha_1^{-1}l};\beta_{12} = \beta_2\sqrt{\alpha_1^{-1}l};\gamma_{11} = \gamma_1\sqrt{\alpha_1^{-1}l^{-1}};\gamma_{12} = \gamma_2\sqrt{\alpha_1^{-1}l^{-1}}; \tag{1.9}$$

$$A(r) = chr - ch(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}sh(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2), \tag{1.10}$$

$$B(r) = 2sh(r/2)(ch(r/2) - \cos(r\sqrt{3}/2)),$$

$$C(r)chr - ch(r/2)\cos(r\sqrt{3}/2) + \sqrt{3}sh(r/2)\sin(r\sqrt{3}/2).$$

В предположении $\alpha_1 = 0$ $(I_1 = 0)$ и $\alpha_2 \neq 0$ $(I_2 \neq 0)$ или $\chi = \infty$ в соответствии с (1.8) алгебраическое уравнение относительно собственного значения λ имеет вид

$$\begin{gathered}(\beta_{21}A(r) + \gamma_{21}rB(r))\mu_2^3 + ((1 + \beta_{21}\gamma_{22} + \beta_{22}\gamma_{21})rB(r) + \beta_{21}\beta_{22}A(r) + \\ + \gamma_{21}\gamma_{22}r^2C(r))\mu_2^2 + ((\beta_{21} + \beta_{22})rB(r) + (\gamma_{21} + \gamma_{22})r^2C(r))\mu_2 + r^2C(r) = 0, \chi = \infty;\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$\mu_2 = \lambda\sqrt{\alpha_2 l};\ \beta_{21} = \beta_1\sqrt{\alpha_2^{-1} l};\ \beta_{22} = \beta_2\sqrt{\alpha^{-1} l};\ \gamma_{21} = \gamma_1\sqrt{\alpha_2^{-1}};\ \gamma_{22} = \gamma_2\sqrt{\alpha_2^{-1} l^{-1}}. \quad (1.12)$$

В работе [11] с помощью графоаналитических методов исследований показано, что

$$A(r) \succ 0, rB(r) \succ 0, C(r) \succ 0 \,\text{при всех}\, r \neq 0 \,\text{и}\, A(r) = B(r) = C(r) = 0 \,\text{при}\, r = 0. \quad (1.13)$$

Очевидно, что в соответствии с соотношениями (1.5) и (1.13) коэффициенты характеристических уравнений (1.7) и (1.11) положительны при всех $r \neq 0$. Это означает, что исследование поведения корней этих уравнений в зависимости от параметров задачи (1.1), (1.2) можно провести с помощью алгебраического критерия устойчивости Льенара — Шипара [12].

Заметим, что задача панельного флаттера (1.1), (1.2) в предположении отсутствия конструкционного трения ($\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$) подробно исследована в работе [11]. Показано, что при $\chi \in [0; 0.6) \cup (1.66; \infty)$ и $\chi = \infty$ возмущенное движение системы является устойчивым, а при $\chi \in [0.06; 1.66]$ имеет место флаттерная неустойчивость. При этом значение критической скорости потока, приводящее к флаттерной неустойчивости, находится из соотношения

$$B^2(r) - 4\chi(1+\chi)^{-2} A(r)C(r) = 0,\ \chi \in [0.6; 1.66], \quad (1.14)$$

откуда следует, что она достигает минимального значения $V_{\text{кр.min}} = V_*$ при $\chi = 1$, а для остальных значений $\chi \in [0.6; 1) \cup (1; 1.66]$ $V_{\text{кр}} \succ V_*$. Значение V_*, найденное в [11] с помощью графоаналитических методов исследований, после уточнения численными методами оказалось равным

$$V_* \approx 170,95 D(a_0\rho_0 l^3)^{-1},\ chi = 1. \quad (1.15)$$

Отметим, что значение (1.15) не намного отличается от минимального значения критической скорости $V_{\text{кр.min}} \approx 178 D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$, найденного А.А. Мовчаном [13].

Для нескольких значений $\chi \in [0.6; 1.66]$ найдены соответствующие критические скорости потока $V_{\text{кр}}$ (табл. 1).

Таблица 1

χ	1.0	0.9 и 1.1	0.71 и 1.41	0.65 и 1.55	0.6 и 1.66
$V_{\text{кр}} \cdot D^{-1}(a_0\rho_0 l^3)$	170,95	190.12	200.20	233.75	300.50

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2.1. Пусть $\beta_1 \neq 0$, а $\beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$. При этом характеристические уравнения (1.7) и (1.11) запишутся, соответственно, в виде

$$\chi A(r)\mu_1^4 + \chi\beta_{11}A(r)\mu_1^3 + (1+\chi)rB(r)\mu_1^2 + \beta_{11}rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0,\ \chi \in [0,\infty), \quad (2.1)$$

$$\beta_{21}A(r)\mu_1^4 + \chi\beta_{11}A(r)\mu_1^3 + (1+\chi)rB(r)\mu_1^2 + r^2C(r) = 0,\ \chi = \infty. \quad (2.2)$$

Подставляя коэффициенты полиномов (2.1) и (2.2) в соответствующие условия критерия устойчивости Льенара — Шипара, получаем следующие соотношения:

$$\beta_{11}^2\chi^2r^2A(r)(B^2(r) - A(r)C(r)) \succ 0,\ \chi \in (0,\infty), \quad (2.3)$$

$$\beta_{21}r^2(B^2(r) - A(r)C(r)) \succ 0,\ \chi = \infty. \quad (2.4)$$

Условия устойчивости (2.3) и (2.4) в силу соотношений (1.5), (1.9), (1.13) и (1.14) эквивалентны следующему условию:

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) \succ 0 \text{ при всех } r \neq 0, \beta_{1,1} \neq 0,\ \chi \in (0\infty) \text{ и } \beta_{2,1} \neq 0,\ \chi = \infty. \quad (2.5)$$

Отсюда следует, что критическое значение скорости потока $V_{\text{кр}}$, приводящее к флаттерной неустойчивости, является решением уравнения (1.14) при $\chi = 1$, а именно

$$(B^2(r) - A(r)C(r)) = 0 \text{ при всех } \beta_1 \neq 0 (\beta_{1,1} \neq 0, \beta_{2,1} \neq 0), r \neq 0, \chi \in (0,\infty) \text{ и } \chi = \infty. (2.6)$$

Это означает, что первое критическое значение скорости потока $V_{\text{кр}}$, приводящее к флаттерной неустойчивости, одно и то же при всех $\beta_1 \neq 0$, $r \neq 0$, $\chi \in (0,\infty)$ и $\chi = \infty$ и равно значению критической скорости (1.15) при $\beta_1 \neq 0$ и $\chi = 1$:

$$V_{\text{кр}} = V_* \approx 170,95D(a_0\rho_0l^3)^{-1},\ \beta_1 \neq 0,\ r \neq 0,\ \chi \in (0,\infty) \text{ и } \chi = \infty. \quad (2.7)$$

Иными словами, в возмущенной системе при наличии исчезающе малого конструкционного трения $\beta_1 \neq 0$ в опорах при достижении скорости потока критического значения (2.7), не зависящего от значений β_1 ($\beta_1 \neq 0$) и χ ($\chi \in (0,\infty)$, $\chi = \infty$), возбуждаются флаттерные колебания.

Из сопоставления значений критических скоростей потока, найденных в предположении отсутствия трения ($\beta_1 = 0$) с самого начала (табл. 1), и соответствующих значений критических скоростей потока (2.7), найденных в предположении наличия исчезающе малого трения ($\beta_1 \neq 0$), очевидно, что при всех $\chi \in (0,1) \cup (1,\infty)$ и $\chi = \infty$ наличие исчезающе малого трения β_1 приводит к эффекту дестабилизации — имеет место скачкообразное падение критической скорости потока. Наиболее ярко явление дестабилизации наблюдается в случае, когда $\chi \in [0; 0.6) \cup (1.66; \infty)$ и $\chi = \infty$. При этом падение критической скорости потока достигает максимального значения $\Delta V_{\text{кр}} = V_* \approx 170.95D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$, а при $\chi = 1$ $\Delta V_{\text{кр}} = 0$. При $\chi \in [0.6; 1) \cup (1; 1.66)$ $\Delta V_{\text{кр}} \succ V_*$. Например, при $\chi = 0.6$ и $\chi = 1.66$ $\Delta V_{\text{кр}} \approx 129.55D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$.

Подставляя $\chi = 0$ в соотношение (2.1), получаем квадратное уравнение

$$rB(r)\mu_1^2 + \beta_{11}rB(r)\mu_1 + r^2C(r) = 0, \text{ при всех } \beta_1 \neq 0 \ (\beta_{1,1} \neq 0), \ r \neq 0, \chi = 0. \quad (2.8)$$

В силу соотношений (1.5), (1.9) и (1.13) очевидно, что корни уравнения (2.8) имеют отрицательные вещественные части при всех $\beta_1 \neq 0$. Следовательно, при $\chi = 0$ и при всех $\beta_1 \neq 0$ возмущенное движение пластинки является устойчивым ($V_{\text{кр}} = \infty$). А так как возмущенное движение пластинки в соответствии с замечанием, приведенным в разделе 1, является устойчивым и при $\beta_1 = 0$, то при $\chi = 0$ наличие конструкционного трения, характеризуемого параметром β_1, не приводит к эффекту дестабилизации.

Таким образом, наличие конструкционного трения $\beta_1 \succ 0$ приводит к эффекту дестабилизации при всех $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ и $\chi = \infty$. Эффект дестабилизации отсутствует только при $\chi = 1$ и $\chi = 0$. При $\chi = 1$ критические значения скоростей потока как при $\beta_1 \neq 0$, так и при $\beta_1 = 0$ совпадают и равны $V_* \approx 170,95D(a_0\rho_0 l^3)^{-1}$. А при $\chi = 0$ наличие трения β_1 на поведение возмущенного движения пластинки не влияет.

2.2. Пусть $\gamma_1 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$.

Легко показать, что в этом случае в соответствии с критерием устойчивости Льенара — Шипара условие устойчивости при $\chi \in (0, \infty)$ имеет вид

$$\chi\gamma_{11}^2 r^4 C(r)(B^2(r) - A(r)C(r)) \succ 0, \ \gamma_1 \succ 0, \ \chi \in (0, \infty), \quad (2.9)$$

откуда в силу условия (2.6) следует, что критическая скорость потока, приводящая к флаттерной неустойчивости, одна и та же для всех $\gamma_1 \succ 0$ ($\gamma_{11} \succ 0$), $\chi \in (0, \infty)$ и равна (2.7). Тем самым в соответствии с вышеизложенным и в этом случае наличие исчезающе малого конструкционного трения $\gamma_1 \succ 0$ при всех $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ приводит к эффекту дестабилизации.

Также легко показать, что при $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ наличие трения $\gamma_1 \succ 0$ не влияет на устойчивость возмущенной системы.

Таким образом, в случае, когда $\gamma_1 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, наличие исчезающе малого трения $\gamma_1 \succ 0$ приводит к эффекту дестабилизации при значениях $\chi \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, а при значениях $\chi = 0$ и $\chi = \infty$ эффект дестабилизации отсутствует.

Проведенные аналогичные исследования случаев, когда $\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и $\gamma_2 \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = 0$, показали, что наличие исчезающе малого конструкционного трения $\beta_2 \neq 0$ приводит к эффекту дестабилизации при значениях $\chi \in [0,1) \cup (1,\infty)$, а наличие исчезающе малого конструкционного трения $\gamma_2 \neq 0$ — при $\chi \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Отметим, что в случае, когда $\beta_2 \neq 0$, при $\chi = 0$ наблюдается эффект дестабилизации, а при $\chi = \infty$ наличие $\beta_2 \neq 0$ приводит к затуханию, в отличие от случая, когда $\beta_1 \neq 0$, при котором, наоборот, при $\chi = 0$ имеем затухание, а при $\chi = \infty$ наблюдается эффект дестабилизации. В случае, когда $\gamma_2 \neq 0$, влияние трения $\gamma_2 \neq 0$ на поведение возмущенной системы аналогично влиянию трения $\gamma_1 \neq 0$.

Численные результаты исследований приведены в табл. 2. Здесь символом $V_{\text{кр}} = \infty$ обозначена устойчивость возмущенной системы.

Таблица 2

	$I_1 = 0,\ I_2 \neq 0$	$I_1 \neq 0,\ I_2 = 0$	$I_1 \cdot I_2 \succ 0,\ I_1 \neq I_2$	$I_1 = I_2 \neq 0$
$\beta_i = \gamma_i = 0,\ i = 1,2$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} \succ V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$
$\beta_1 \neq 0$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$
$\beta_2 \neq 0$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$
$\gamma_1 \neq 0$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$
$\gamma_2 \neq 0$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = \infty$	$V_{\text{кр}} = V_*$	$V_{\text{кр}} = V_*$

Работа выполнена в рамках программы A^2-NET-TEAM Advanced Aircraft Network for Theoretical Experimental Aeroelastic Modelling.

Институт механики НАН РА

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

О дестабилизирующем влиянии конструкционного трения на устойчивость пластинки при сверхзвуковом обтекании и наличии сосредоточенных инерционных моментов на кромках

Исследуется влияние исчезающе малого конструкционного трения на устойчивость шарнирно опертой вдоль длинных кромок удлиненной упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, в предположении наличия на закрепленных кромках сосредоточенных инерционных моментов. Показано, что границы устойчивости, установленные для системы с исчезающе малым трением и для системы, трение в которой с самого начала предполагалось равным нулю, не совпадают.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան

Կոնստրուկցիոն շփման անկայունացնող ազդեցությունը գերձայնային գազի հոսքում շրջահոս սալի կայունության վրա կենտրոնացված իներցիալ մոմենտների առկայության դեպքում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում շրջահոս հոդակապահեն սալի կայունության խնդիրը, որի երկար եզրերին առկա են կենտրոնացված իներցիալ մոմենտներ, իսկ հոդակապերում հաշվի է առնված շփումը: Ցույց է տրված, որ կայունության սահմանները շփման առկայության եւ բացակայության դեպքերում տարբեր են:

M. V. Belubekyan, S. R. Martirosyan

On the Destabilizing Effect of Constructive Friction on the Stability of the Plate in Supersonic Flow and the Presence of Concentrated Inertial Moments on the Edges

The influence of a vanishingly small conctructive friction on the stability of a hinged along the long edges of an elongated elastic plate, supersonic gas flow are investigated, the assumption that there is fixed-represented at the edges of the lumped inertia of the moments. It is shown that the stability boundaries established for the system with vanishingly small friction and for a system in which the friction from the beginning assumed to be zero, do not coincide.

Литература

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М. Наука. 1961. 329 с.
2. *Bolotin V.V., Zhinzher N.I.* - Int. J. Solids Structures. 1969. V. 5. P. 965-989.
3. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М. Наука. 1987. 352 с.
4. *Пановко Я.Г., Сорокин С.В.* - Изв. АН СССР. МТТ. 1987. N 5. С. 135-139.
5. *Жинжер Н.И.* - Изв. АН СССР. МТТ. 1968. N 3. С. 44-49.
6. *ZieglerH.* Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik. Ing.-Arch. 1952. Bd.20. H.1. (*Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М. Мир. 1971. 192 с.)
7. *Белубекян М.В., Казарян К.Б., Мартиросян С.Р.* - Доклады НАН Армении. 2007. Т. 107. N 2. С. 167-172.
8. *Кириллов О.Н.* - ДАН РФ. Механика. 2004. Т. 395. N 5. С. 614-620.
9. *Кириллов О.Н., Сейранян А.П.* - Изв. АН РФ. Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. Вып.4. С. 584-611.
10. *Ржаницын А.Р.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. N 5. С. 33-44.
11. *Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.* - Мат. методи та фiз.-мех. поля. 2006. Т. 49. N 3. С. 162-167.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. Наука. 1967. 576 с.
13. *Мовчан А.А.* - Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т. 20. С. 211-212.