ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 111 2011 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

С. Л. Берберян

О некоторых предельных множествах гармонических функций

(Представлено академиком В.С.Захаряном 30/VIII 2010)

Ключевые слова: *гармонические функции, нормальные функции, неевклидовое расстояние, предельные множества, угловой предел*

Исследованию граничного поведения гармонических функций, определенных в единичном круге, посвящено много работ. Отметим, в частности, важные из них [1-5]. В настоящей работе продолжены эти исследования. В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений. Подробное их описание дано в [6]. Введем еще одно обозначение. Точку $\xi \in \Gamma$ относят к множеству $I(f)$, если предельное множество $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = \overline{R}$ для любого угла $\Delta(\xi)$, где черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$.

Сформулируем один из основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Если $\xi \in K(f)$ и предельное множество $C(f, \xi, \Delta(\xi) \neq \overline{R})$ для любого угла $\Delta(\xi)$, то для любой последовательности $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, лежащей внутри некоторого угла $\Delta_1(\xi)$ и удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$, справедливо соотношение $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = C(f, \xi, z_n)$ для любого угла $\Delta(\xi)$.*

Предварительно докажем леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D, и в некоторой точке $\xi \in \Gamma$ предельные множества $C(f, \xi, \Delta(\xi))$ ограничены сверху (или снизу) для любого угла $\Delta(\xi)$, Тогда предельные множества $C(f, \xi, L(\xi, \varphi))$ и $C(f, \xi, h(\xi, \varphi))$ совпадают в произвольной точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ для любого значения $\varphi \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.*

Доказательство. Без нарушения общности будем считать, что $\xi = 1$. Известно из неевклидовой геометрии круга D, что неевклидовое расстояние от любой точки гиперцикла $L(\xi,\varphi)$ до диаметра Λ^0 равно одному и тому же числу $M = \sigma(0, \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2})$. Рассмотрим такую последовательность углов и гиперциклов, что $\varphi_k \to \varphi$, убывая или возрастая, и гиперциклы $L(\xi,\varphi_k)$ стягиваются к гиперциклу $L(\xi,\varphi)$. Возьмем произвольную последовательность $\{z_n\}$ такую, что $\{z_n\} \to \xi$, $z_n \in L(\xi,\varphi)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(z_n) = \gamma$, где γ — некоторое действительное число. Через точки последовательности $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ проведём неевклидовые перпендикуляры E_n к радиусу окружности Γ в точке ξ, пересекающие хорду $h(\xi,\varphi)$ в точках z'_n. Очевидно, что точки последовательности z'_n при фиксированном k, если $n \geq N(k)$, будут лежать между гиперциклом $L(\xi,\varphi_k)$ и диаметром Λ_0. Тогда при указанных значениях n справедливо неравенство

$$\sigma(z_n, z'_n) \leq \left|\sigma\left(0, \operatorname{tg}\varphi_k/2\right) - \sigma\left(0, \operatorname{tg}\varphi/2\right)\right|. \qquad (1)$$

Поэтому существуют некоторые подпоследовательности $\{z_{n_m}\}$ и $\{z^1_{n_m}\}$, для которых справедливо соотношение (1) и $\sigma(z_{n_m}, z^1_{n_m}) \to 0$ при $m \to \infty$. В силу утверждения леммы 3 работы [7] вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_{n_m}) = \gamma$. Следовательно, из того, что $\gamma \in C(f,\xi,L(\xi,\varphi))$, следует принадлежность γ предельному множеству $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$. Рассмотрим теперь произвольную последовательность точек q_n, $n = 1, 2, \ldots$, $q_n \in h(\xi,\varphi)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = \beta$, где β — некоторое действительное число. Проведя те же рассуждения, что и в первом случае, используя неравенство (1), получим $\beta \in C(f,\xi,L(\xi,\varphi))$. Тем самым утверждение леммы 1 полностью доказано.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция в D и в некоторой точке $\xi \in \Gamma$ найдется такая последовательность $\{z_n\}$, лежащая в некотором углу $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sigma(z_n,z_{n+1}) \leq M < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$. Если предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничено сверху (или снизу) для любого угла $\Delta(\xi)$, содержащего последовательность $\{z_n\}$, числом $b \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$, то функция $f(z)$ имеет в точке ξ угловой предел b.*

Доказательство. Без нарушения общности предположим, что $\xi = 1$ и предельные множества $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничены сверху. Соединив точки последовательности $\{z_n\}$ неевклидовыми отрезками, получим кривую L, лежащую в некотором углу $\Delta(1,\varphi'_1,\varphi'_2)$, где $\Delta(1,\varphi_1,\varphi_2) \subset \Delta(1,\varphi'_1,\varphi'_2)$. Докажем, что $\varlimsup\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta(1,-\beta,\beta)}} f(z) = \alpha = b$, где $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ и $\Delta(1,-\beta,\beta)$ — любой угол, содержащий $\Delta(1,\varphi'_1,\varphi'_2)$. Допустим противное, т. е. $\alpha < \beta$. Это значит, что существует такая последовательность $\{q_n\} \to 1$ при $n \to \infty$, $q_n \in \Delta(1,-\beta,\beta)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = b > \alpha$. Проведем через точки q_n неевклидовые перпендикуляры E_n к диаметру Λ^0 в точке $\xi = 1$, пересекающие L и диаметр Λ^0 соответственно в точках t_n и r_n, где $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что последовательности $\{q_n\}$, $\{t_n\}$ и $\{r_n\}$ лежат в некоторой гиперциклической области $H(1, -\beta_0, \beta_0) \supset \Delta(1, -\beta, \beta)$, где $0 < \beta_0 < \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому $\sigma(q_n, r_n) \le M_1$ и $\sigma(r_n, t_n) \le M_1$, где $M = \sigma(0, \operatorname{tg} \dfrac{\beta_0}{2})$. Без нарушения общности допустим, что последовательность $\{t_k\}_1^\infty$ отлична от последовательности $\{z_n\}_1^\infty$ и t_k при любом k лежит между z_{n_k} и z_{n_k+1}. Следовательно $\sigma(t_k, z_{n_k}) \le \sigma(z_{n_k}, z_{n_k+1}) \le M < +\infty$. В силу неравенства треугольника получим, что $\sigma(r_{n_k}, z_{n_k}) \le \sigma(r_{n_k}, t_k) + \sigma(t_k, z_{n_k}) \le M_1 + M$.

Обозначим $K : \{z \in D,\ |z| \le \operatorname{th}(M{+}M_1{+}1)\}$ и $F; \{z \in D,\ |z| \le \operatorname{th}(M_1{+}M{+}2)\}$. Для произвольного $k = 1, 2, \ldots$ рассмотрим отображения $S_k(z) = \dfrac{z + r_{n_k}}{1 + r_{n_k} z}$. При достаточно больших k имеем, что $S_k(K) \subset H(1, -\beta_1, \beta_1)$, где $0 < \beta_0 < \beta_1 < \dfrac{\pi}{2}$ и $H(1, -\beta_0, \beta_0) \subset H(1, -\beta_1, \beta_1)$. Аналогично имеем, что $S_k(F) \supset H(1, -\beta_2, \beta_2)$, где $0 < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dfrac{\pi}{2}$ и $H(1, -\beta_1, \beta_1) \subset H(1, -\beta_2, \beta_2)$. Очевидно, что при $k = 1, 2, \ldots$ $S_k(0) = r_{n_k}$. Определим последовательности $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ из условий $S_k(z'_{n_k}) = z_{n_k}$ и $S_k(q'_k) = q_k$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу инвариантности метрики σ при отображениях $S_k(z)$ будем иметь, что последовательности $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ лежат внутри K вместе со всеми своими предельными точками. Так как в силу предположения предельное множество $C(f, 1, H(1, -\beta_2, \beta_2))$ ограничено сверху (снизу) и $S_n(F) \subset H(1, -\beta_2, \beta_2)$, то семейство функций $\{f(S_n(z))\}$ ограничено сверху (снизу) на F. Применяя критерий Монтеля для гармонических функций (см. [8]), получим, что семейство функций $\{f(S_n(z))\}$ нормально в области $int\, F$. Поэтому можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на K к гармонической функций $F(z)$ или равномерно расходящуюся к $-\infty$. Выберем такие подпоследовательности $\{z''_{n_k}\}$ и $\{q''_k\}$ из последовательностей $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} z''_{n_k} = z_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} q''_{n_k} = q_0$, где z_0 и q_0 лежат внутри K. Учитывая, что

$$F(z_0) = \lim_{k\to\infty} F(z''_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(S_{n_k}(z''_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} f(z''_{n_k}) = \alpha \ne -\infty, \tag{2}$$

где $S_{n_k}(z''_{n_k}) = z'''_{n_k}$ — некоторая подпоследовательность z_{n_k}, случай равномерной расходимости к $-\infty$ исключается. С другой стороны, в силу условия имеем, что $f(z) \le b$ при $z \in K$ и

$$F(q_0) = \lim_{k\to\infty} F(q''_k) = \lim_{k\to\infty} f(S_{n_k}(q''_k)) = b \ne -\infty, \tag{3}$$

где $S_{n_k}(q''_k) = q'''_k$ — некоторая подпоследовательность q_k. Отсюда в силу принципа максимума для гармонических функций следует, что $F(z) \equiv b$, а это противоречит предположению $b > \alpha$ и соотношению (2).

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta(1,-\beta,\beta)}}} f(z) = \alpha = b$. В силу того, что угол $\Delta(1,-\beta,\beta)$ можно выбрать сколь угодно большим, получим, что для таких углов $\Delta(\xi)$, содержащих кривую L, справедливо соотношение $\overline{\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta(\xi)}}} f(z) = \alpha$. Докажем, что

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in L}} f(z) = \alpha. \tag{4}$$

Для этого рассмотрим произвольную последовательность $\{l_k\} \in L$, $l_k \to 1$ при $k \to \infty$ и покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(l_k) = \alpha$. Очевидно, что l_k будет лежать между z_{n_k} и z_{n_k+1} при любом k и поэтому $\sigma(l_k, z_{n_k}) \le \sigma(z_{n_k}, z_{n_k+1}) \le M + \infty$. Рассмотрим отображения $S_k(z) = \dfrac{z + l_k}{1 + \bar{l}_k z}$, где $k = 1, 2, \dots$. Пусть $Q : \{z \in D, |z| \le th(M+1)\}$ и $Q_1 : \{z \in D, |z| \le th(M+2)\}$. Очевидно, что $S_k(0) = l_k$ и $S_k(z'_{n_k}) = z_{n_k}$, где z'_{n_k} — прообразы точек z_{n_k} при отображениях $S_k(z)$. В силу инвариантности неевклидовой метрики получим, что все предельные точки последовательности z'_{n_k} лежат внутри Q. Пусть $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z''_{n_k}$, где z''_{n_k} — некоторая подпоследовательность последовательности z'_{n_k}. При достаточно больших k имеем, что $S_k(Q) \subset S_k(Q_1) \subset H(1,-\beta,\beta)$, где $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ и $H(1,-\beta,\beta)$ — некоторая гиперциклическая область. Так как предельное множество $C(f, 1, H(1,-\beta,\beta))$ ограничено сверху числом b, то семейство $f(S_k(z))$ ограничено сверху при $z \in Q$ и в силу критерия Монтеля семейство нормально в области $\int Q_1$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на Q к гармонической функции $F(z)$ или равномерно расходящуюся к $-\infty$. Принимая во внимание соотношение (2) и неравенство $F(z) \le \alpha$ при $z \in Q$, в силу принципа максимума $F(z) \equiv \alpha$. Поэтому $F(0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(s_{n_k}(0)) = \lim\limits_{k\to\infty} f(l_{n_k}) = \alpha$.

В силу произвольности последовательности l_k отсюда вытекает соотношение (4). Принимая во внимание утверждение леммы 1, получим, что выполнены все условия теоремы 3 из работы [9]. Из утверждения этой теоремы вытекает существование углового предела в точке $\xi = 1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Если в точке $\xi \in \Gamma$ предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничено сверху (или снизу) числом $b \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$ для любого угла $\Delta(\xi)$, то для произвольной кривой L, некасательной к Γ в точке ξ, предельное множество $C(f,\xi,L)$ также ограничено сверху (или снизу) числом $b \in C(f,\xi,L)$.*

Доказательство. Без нарушения общности считаем, что $\xi = 1$ и предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ ограничено сверху для любого угла $\Delta(\xi)$. Обозначим через $\alpha = \sup C(f,\xi,L)$. В силу замкнутости предельного множества $C(f,\xi,L)$ α должно принадлежать этому множеству. Очевидно, что $\alpha \leq b$. Рассмотрим такой угол $\Delta_1(1)$, чтобы $L \subset \Delta_1(1)$. В силу предположения существует такая последовательность $\{q_n\} \to 1$, $q_n \in \Delta_1(1) \subset H(1, -\beta, \beta)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = b$. Проведём через точки q_n неевклидовые перпендикуляры E_n к диаметру Λ^0 в точке $\xi = 1$, пересекающие L и диаметр Λ^0 соответственно в точках t_n и r_n, где $n = 1, 2, \ldots$. Придерживаясь тех же рассуждений, что и при доказательстве леммы 2, покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = b$. Следовательно, $\alpha = b$ и утверждение леммы 3 доказано.

Замечание 1. Отметим, что если в условиях леммы 3 добавить условие $-\infty \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$ (или $+\infty \in C(f, \xi, \Delta(\xi))$ для любого угла $\Delta(\xi)$, то тем же способом, что и для леммы 3, можно показать $-\infty \in C(f, \xi, L)$ (или $+\infty \in C(f, \xi, L)$).

Учитывая замечание 1 и принимая во внимание, что предельные множества $C(f, \xi, \Delta(\xi))$ и $C(f, \xi, L)$ $-$ замкнутые связные множества для гармонических функций $f(z)$, определённых в D, в качестве следствия леммы 3 получим теорему 2.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ $-$ произвольная гармоническая функция, определенная в D. Если $\xi \in K(f)$ и предельное множество $C(f, \xi, \Delta(\xi)) \neq \overline{R}$ для произвольного угла $\Delta(\xi)$, то $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = C(f, \xi, L)$ для любого угла $\Delta(\xi)$ и произвольной кривой L, некасательной к Γ в точке ξ.*

Доказательство теоремы 1. Соединим неевклидовыми отрезками точки последовательности $\{z_n\}$. Получим кривую L, лежащую в некотором углу $\Delta_1(\xi)$. Докажем соотношение

$$C(f, \xi, L) = C(f, \xi, \{z_n\}). \tag{5}$$

Действительно, пусть $\omega_0 \in C(f, \xi, L)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} z'_k = \xi$, $z'_k \in L$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \omega_0$. Обозначим через z_{n_k} и z_{n_k+1}, $k = 1, 2, \ldots$ те точки из последовательности $\{z_n\}$, которые являются ближайшими к z'_k, $k = 1, 2, \ldots$. По предположению

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(z'_k, z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \sigma(z'_k, z_{n_k+1}) = 0. \tag{6}$$

Из соотношения (5) в силу утверждения леммы 3 работы [6] следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \omega_0$. Поэтому $\omega_0 \in C(f.\xi, \{z_n\})$ и, значит, $C(f, \xi, L) \subset C(f, \xi, \{z_n\})$. Обратное включение очевидно и, следовательно, соотношение (5) доказано. Применяя теорему 2, получим утверждение теоремы 1.

Анализируя доказательство теоремы 1, легко видеть, что оно справедливо для произвольных гармонических функций класса $\Re$.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ $-$ произвольная гармоническая функция класса $\Re$. Если $\xi \in K(f)$, то $C(f, \xi, \Delta(\xi)) = C(f, \xi, z_n)$ для любого угла $\Delta(\xi)$ и произвольной последовательности $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, лежащей внутри некоторого угла $\Delta_1(\xi)$ и* *удовлетворяющей условию*

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(z_n, z_{n+1}) = 0 \tag{7}$$

Следствие. Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция класса $\Re$. Если точка $\xi\in\Gamma$ принадлежит множеству $I(f)$, а последовательность $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\xi$, лежит внутри некоторого угла $\Delta_1(\xi)$ и удовлетворяет условию (7), то $C(f,\xi,z_n)=\overline{R}$.

Замечание 2. Отметим, что утверждение теоремы 3 для мероморфных функций класса $\Re$, когда вместо последовательности $\{z_n\}$ рассматриваются хорды $h(\xi,\varphi)$, получено в работе [10]. Утверждение следствия для мероморфных функций класса $\Re$ при условии, что последовательность $\{z_n\}$ взята на некоторой хорде $h(\varsigma,\varphi)$, получено в работе [11].

В качестве следствия леммы 2 можно сформулировать следующий результат

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определенная в D. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел β, необходимо и достаточно, чтобы:*

1. *предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ было ограничено сверху (или снизу) в любом углу $\Delta(\xi)$ числом $\beta\in C(f,\xi,\Delta(\xi))$;*

2. *существовала такая последовательность $\{z_n\}$, лежащая в некотором углу $\Delta_1(\xi)$, для которой $z_n\to\xi$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sigma(z_n,z_{n+1})\le M<+\infty$;*

3. *существовал предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.*

Доказательство теоремы 4. Необходимость условий в теореме 4 очевидна. Достаточность условий в теореме 4 следует из утверждения леммы 2.

Замечание 3. Пример функции $f(z)=arg(1-z)$ в точке $z=1$ показывает, что условие принадлежности одного и того же числа b предельным множествам $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ для любого угла $\Delta(\xi)$ является существенным условием.

Академиком М. М. Джрбашяном были введены обобщенные операторы типа Римана — Лиувилля $L^{(\omega)}$, которые ассоциируются с произвольной функцией $\omega(x)$ класса Ω, определяемой условиями:

1. $\omega(x)$ положительна и непрерывна на $[0,1)$;

2. $\omega(0)=1$, $\int\limits_0^1\omega(x)dx<\infty$.

Им же было доказано, что если $f(z)$ — произвольная гармоническая функция, определённая в D и $f_\omega(z) = L^{(\omega)}\{f(z)\}$, то функция $f_\omega(z)$ — гармоническая в D. Заменяя в рассмотренных теоремах гармоническую функцию $f(z)$ гармонической функцией $f_\omega(z)$, где $\omega(x) \in \Omega$, мы получим все утверждения этих теорем для указанных классов гармонических функций.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

С. Л. Берберян

О некоторых предельных множествах гармонических функций

Исследуется вопрос совпадения у гармонических функций некоторых предельных множеств. Получены новые необходимые и достаточные условия для существования углового предела в произвольной точке единичной окружности.

Ս. Լ. Բերբերյան

Հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ սահմանային բազմությունների մասին

Ուսումնասիրվում է հարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ սահմանային բազմությունների համընկնելիության հարցը: Տրվում են նոր անհրաժեշտ եւ բավարար պայմաններ միավոր շրջանագծի կամայական կետում անկյունային սահմանի գոյության համար:

S. L. Berberyan

About Some Harmonic Functions Cluster Sets

It is studied the question of coincidence of some cluster sets harmonic functions. Besides, new necessary and sufficient conditions were obtained for the existence of angular limit at any point of the unit circle.

Литература

1. *Джрбашян М.М.* - Мат. сб. 1969. Т. 79 (121). N4(8). С. 517-615.

2. *Джрбашян М.М., Захарян В.С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. 1993. М. Изд. фирма "Физ.-мат. лит." 224 с.

3. *Гаврилов В.И., Захарян В.С., Субботин А.В.* - ДНАН Армении. 2002. Т. 102. N3. С. 203-209.

4. *Джрбашян А.М.* - Изв. НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N2. С. 47-75.

5. *Ловатер А.* - Итоги науки и техники.Мат. анализ. 1973. Т. 10. С. 99-260.

6. *Берберян С.Л.* - ДНАН Армении. Т. 110. N2. С. 128-136.

7. *Берберян С.Л., Гаврилов В.И.* - Mathematica Montisnigri. 1993. V. 1. P. 17-25.

8. *Монтель П.* Нормальные семейства функций. 1936. ОНТИ СССР. 240 с.

9. *Берберян С.Л.* - Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 2007. N1. С. 55-57.

10. *Rung D. C.* - Mich. Math. Journal. 1963. V. 10. N1. P. 43-51.

11. *Гаврилов В.И.* - Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1965. N5. С. 3-10.