ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 512.57

Л. В. Акопян, В. С. Акопян

Решение уравнения деления круга без периодов Гаусса

(Представлено академиком В.С. Захаряном 14/VI 2010)

Ключевые слова: *лианитовые корни, переходной многочлен, периоды Гаусса, условные индексы, побочные корни*

Со времен Гаусса теория уравнения деления круга и общая концепция непосредственного вычисления первообразных корней остаются неизменными и единственными. В статье предлагается иной подход к решению уравнения деления круга при любых простых показателях n. Детально будут вычислены первообразные корни в трех важнейших случаях: $n = 11,\ 13,\ 17$.

Пусть задано множество двухэлементных лианитов, существующих в пределах алгебры:

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \sigma_2 + \sigma_1, \\ \sigma_1\sigma_2 = (x_1, x_2)(y_1, y_2) = [x_1(y_1 + y_2); x_2y_1] \quad e = (1, 0); 0 = (0, 0). \end{cases} \tag{1.1}$$

Алгебра (1.1) некоммутативная и неассоциативная по умножению, однако дистрибутивная слева направо, т.е. $\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3)$. Правило составления степени определяется как $\sigma^n = \sigma[\sigma\cdot(\sigma\sigma)]$. $e = (1, 0)$ правая единица.

Теорема. *Пусть у многочленов* $f^n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdot + a_{n-1}x + a_n$ *и* $f^2(x) = x^2+px+g$ *есть хотя бы один общий числовой корень* x_{02}, *причем лианит* $\sigma(x_1, x_2)$ *является основным нечисловым корнем* $f^2(x)$ *в пределах алгебры (1.1). Тогда существует многочлен* $\varphi^{n-1}(p, g)$ *такой, что*

$$f^n(\sigma) = [x_{01} \cdot \varphi^{n-1}(p, g); \frac{g}{p}\varphi^{n-1}(p, g)]. \tag{1.2}$$

В формуле (1.2) x_{01} *несовпадающий числовой корень между многочленами* $f^n(x)$ *и* $f^2(x)$.

Элементы лианитов, а также многочлены заданы над множеством комплексных чисел, причем любое число имеет лианитовый аналог: $k \cdot e = (k, 0)$.

Пусть задано $f^{11}(x) = x^{11} - 1 = 0$ и $\sigma(x_1, x_2)$ — искомый лианит в пределах алгебры (1.1). Возведя в степень $n = 11$, получим

$$\sigma^{11} = (x_1, x_2)^{11} = [x_1^{11} + 10x_1^{10}x_2 + 36x_1^9x_2^2 + 56x_1^8x_2^3 + 35x_1^7x_2^4 + 6x_1^6x_2^5; \\ x_1^{10}x_2 + 9x_1^9x_2^2 + 28x_1^8x_2^3 + 35x_1^7x_2^4 + 15x_1^6x_2^5 + x_1^5x_2^6]. \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в $f^{11}(\sigma) = \sigma^{11} - (1, 0)$ и учитывая, что $x_1 = -p$; $x_2 = \dfrac{g}{p}$, после тождественного сопоставления с формулой (1.2) получим

$$\varphi^{10}(p, g) = p^{10} - 9p^8g + 28p^6g^2 - 35p^4g^3 + 15p^2g^4 - g^5. \tag{1.4}$$

А из сопоставления первых элементов $f^n(\sigma) = f^{11}(\sigma) = \sigma^{11} - (1, 0) = (x_1, x_2)^{11} - (1, 0)$ с (1.2), с учетом того, что $x_{02} = -p - x_{01}$, получим

$$x_{02} = \frac{-p^9g + 8p^7g^2 - 21p^5g^3 + 20p^3g^4 - 5pg^5 + 1}{p^{10} - 9p^8g + 28p^6g^2 - 35p^4g^3 + 15p^2g^4 - g^5}. \tag{1.5}$$

Подставляя x_{02} в $f^2(x) = x^2 + px + g = 0$, получаем общее параметрическое уравнение

$$p^{11} - 11p^9g + 44p^7g^2 - 77p^5g^3 + 55p^3g^4 - 11pg^5 + g^{11} + 1 = 0. \tag{1.6}$$

Для любого n формулы типа (1.4), (1.5), (1.6) получаются стандартно по этой же схеме действий. Параметрическое условие (1.6) означает, что любой паре (p, g), удовлетворяющей (1.6), соответствует квадратное уравнение $f^2(x) = x^2 + px + g = 0$, имеющее хотя бы один общий числовой корень с уравнением $x^{11} - 1 = 0$. Однако существует особый случай: $g = 1$, при котором для любого нечетного n выражения типа (1.4), (1.6), а также числители формул типа (1.5) обладают общим множителем в виде многочлена степени $\dfrac{n-1}{2}$. В этом частном случае $g = 1$ искомый лианит $\sigma(x_1, x_2) = (-p, \dfrac{g}{p}) = -(p, \dfrac{1}{p})$ превращается в побочный корень уравнения $x^n - 1 = 0$, т.е. $\sigma^n - 1 = (0, 0)$ [1, 2]. Следовательно, два числовых корня $x^2 + px + 1 = 0$ совпадают с двумя первообразными корнями уравнения $x^n - 1 = 0$. Действительно, для случая Вандермонда ($n = 11$), подобрав $g = 1$, для одного значения параметра p получим $p = -2$, ибо $x^{11} - 1 = 0$ имеет единичный корень. Из параметрического уравнения (1.6) при условии, что $g = 1$, следует

$$p^{11} - 11p^9 + 44p^7 - 77p^5 + 55p^3 - 11p + 2 = (p + 2)(p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1)^2 = 0. \tag{1.7}$$

При $g = 1$, $\varphi(p,g)$ из (1.4), а также числитель из (1.5) соответственно разлагаются по многочленам

$$\begin{aligned} &\varphi(p,1) = p^{10} - 9p^8 + 28p^6 - 35p^4 + 15p^2 - 1 = \\ &= (p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1)(p^5 + p^4 - 4p^3 - 3p^2 + 3p + 1); \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &-p^9 + 8p^7 - 21p^5 + 20p^3 - 5p + 1 = \\ &= (p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1)(-p^4 - p^3 + 3p^2 + 2p - 1). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, для вычисления 10 первообразных корней уравнения $x^{11}-1=0$ $(x \neq 1)$ необходимо найти числовые корни уравнения вида

$$p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1 = 0. \tag{1.10}$$

Тогда 10 корней квадратных уравнений $x^2 + px + 1 = 0$ заведомо являются первообразными корнями уравнения $x^{11} - 1 = 0$, ибо $\sigma(-p, \frac{1}{p})$ есть побочный лианитовый корень для $f^{11}(x) = x^{11} - 1 = 0$.

Для любого нечетного n по этой же схеме можно найти переходное уравнение степени $\frac{n-1}{2}$. Тогда первообразные корни $x^n - 1 = 0$ вычисляются как корни $x^2 + px + 1 = 0$, где p множество корней переходного уравнения. Для случаев $n = 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19$ имеем

$$\begin{cases} f(p) = p^2 - p - 1; & n = 5, \\ f(p) = p^3 - p^2 - 2p + 1; & n = 7, \\ f(p) = p^4 - p^3 - 3p^2 + 2p + 1; \qquad n = 9, & (p_1 = 1), \\ f(p) = p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1; & n = 11, \\ f(p) = p^6 - p^5 - 5p^4 + 4p^3 + 6p^2 - 3p - 1; & n = 13, \\ f(p) = p^8 - p^7 - 7p^6 + 6p^5 + 15p^4 - 10p^3 - 10p^2 + 4p + 1; & n = 17, \\ f(p) = p^9 - p^8 - 8p^7 + 7p^6 + 21p^5 - 15p^4 - 20p^3 + 10p^2 + 5p - 1; & n = 19. \end{cases} \tag{1.11}$$

В наборе (1.11) только случай $n = 11$ требует серьезных усилий для нахождения корней переходного уравнения. Все они принадлежат классу уравнений, у которых множество значений всевозможных сумм по двум различным числовым корням со знаком минус $-(p_i + p_j)$ и всевозможных произведений $p_l p_k$ $(l \neq k)$ совпадают, причем за исключением случая $n = 5$, для которого $p_1 p_2 = -(p_1 + p_2) = -1$, во всех остальных случаях имеем $-(p_i + p_j \neq p_i p_j)$. Из сказанного вытекает, что если разложить данное переходное уравнение степени $\frac{n-1}{2}$ по неопределенным коэффициентам, где один из множителей является квадратным трехчленом

$$f^{\frac{n-1}{2}}(p) = (p^2 + a_1 p + a_2)(p^{\frac{n-1}{2}-2} + b_1 p^{\frac{n-1}{2}-3} + \ldots + b_{\frac{n-1}{2}-3} p + b_{\frac{n-1}{2}-2}) = 0, \tag{1.12}$$

то множества значений $a_1 = -(p_i + p_j)$; $a_2 = p_l p_k$ должны быть числовыми корнями одного и того же алгебраического уравнения степени $\dfrac{\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!}{2!\left(\dfrac{n-1}{2}-2\right)!}$. Это свойство корней обеспечивает возможность решения любых переходных уравнений в радикалах.

Рассмотрим случаи $n = 11, 13, 17$, которые вместе с $n = 19$ считаются классическими.

1. Уравнению $x^{11} - 1 = 0$ соответствует переходное уравнение вида

$$f^5(p) = p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1 = 0.$$

Разложим $f^5(p)$ по неопределенным коэффициентам:

$$f^5(p) = (p^2 + a_1 p + a_2)(p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3). \tag{1.13}$$

После выполнения стандартных действий получаем заранее ожидаемый результат: коэффициенты a_1, a_2 суть корни одного и того же уравнения 10-й степени

$$a_{1,2}^{10} + 4a_{1,2}^9 - 6a_{1,2}^8 - 35a_{1,2}^7 - 8a^6 a_{1,2} + 67a_{1,2}^5 + 37a_{1,2}^4 - 28a_{1,2}^3 - 13a_{1,2}^2 + 3a_{1,2} + 1 = 0. \tag{1.14}$$

В (1.14) имеем $a_1 = -(p_i + p_j)$, а множество значений $a_2 = p_l p_k$ $(l \neq k)$. Следовательно, (1.14) не может иметь делителей в виде многочленов с целыми коэффициентами ниже пятой степени. Действительно, только из пяти выражений $-(p_i + p_j)$ можно получить сумму с целым значением. В качестве примера возьмем один из возможных наборов как подмножество корней (1.14): $-(p_1 + p_5)$, $-(p_2 + p_3)$, $-(p_2 + p_4)$, $-(p_1 + p_4)$, $-(p_3 + p_5)$. Их сумма дает $-2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = -2$. Следовательно, для возможного делителя $a_1^5 + k_1 a_1^4 + \ldots + k_5$ имеем $k_1 = 2$. Очевидно, что $k_5 = -1$, ибо точно такой же многочлен пятой степени в качестве делителя должно иметь уравнение относительно a_2, у которого корни суть p_1p_5, p_2p_3, p_2p_4, p_1p_4, p_3p_5, а ведь их произведения есть свободный член k_5 со знаком $(-)$, следовательно, $k_5 = -p_1^2 \ldots p_5^2 = -1$. Второй член многочлена $f^5(a_1)$ есть сумма всевозможных попарных произведений вышеуказанных пар. Из сорока слагаемых пять образуют сумму $p_1^2 + \ldots + p_5^2 = 9$. Остальные 35 членов как произведения вида $p_l p_k$ дают 70 слагаемых в виде свободных p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 со знаком $(-)$, следовательно, их сумма даст $-14(p_1 + p_2 + \ldots + p_5) = -14$, из чего следует $k_2 = 9 - 14 = -5$.

Итак, (1.14) разлагается как произведение двух многочленов пятой степени:

$$(a_1^5 + 2a_1^4 - 5a_1^3 - 2a_1^2 + 4a_1 - 1)(a_1^5 + 2a_1^4 - 5a_1^3 - 13a_1^2 - 7a_1 - 1). \tag{1.15}$$

Именно этим обусловлена трудность случая $n = 11$, но ниже будет показано, что условие (1.15) достаточно для достижения цели. Для переходного уравнения $p^5 - p^4 - 4p^3 + 3p^2 + 3p - 1 = 0$ система резольвент Лагранжа дает

$$\begin{cases} 5p_1 - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ 5p_2 - 1 = A\alpha_1 + D\alpha_2 + C\alpha_3 + B\alpha_4, \\ 5p_3 - 1 = B\alpha_1 + C\alpha_2 + D\alpha_3 + A\alpha_4, \\ 5p_4 - 1 = C\alpha_1 + A\alpha_2 + B\alpha_3 + D\alpha_4, \\ 5p_5 - 1 = D\alpha_1 + B\alpha_2 + A\alpha_3 + C\alpha_4. \end{cases} \tag{1.16}$$

В (1.16) A, B, C, D — первообразные корни уравнения $x^5 - 1 = 0$, которые можно найти как корни уравнения $x^2 + px + 1 = 0$, где p суть корни уравнения $p^2 - p - 1 = 0$ из (1.11):

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}; \quad B = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}; \\ C &= \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}; \quad B = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — резольвенты Лагранжа, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= p_1 + Dp_4 + Cp_5 + Bp_2 + Ap_3; \quad \alpha_2 = p_1 + Dp_3 + Cp_2 + Bp_4 + Ap_5; \\ \alpha_3 &= p_1 + Dp_2 + Cp_3 + Bp_5 + Ap_4; \quad \alpha_4 = p_1 + Dp_5 + Cp_4 + Bp_3 + Ap_2. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Возведя уравнения системы (1.16) в степень 2, 3, 4, 5 и учитывая теорему Виета, получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 = 22, \quad (\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3) \\ \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_4 + \alpha_4^2\alpha_2 + 11 = 0, \\ \alpha_1^3\alpha_2 + \alpha_2^3\alpha_4 + \alpha_3^3\alpha_1 + \alpha_4^3\alpha_3 + 31 \cdot 11 = 0, \\ \alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 + \alpha_4^5 - 11 \cdot 89 = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Действительно, из (1.18) получим

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_4 = p_1^2 + \cdots + p_5^2 + (C + D)(p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_1p_4 + p_3p_5) + \\ + (A + B)(p_1p_2 + p_1p_3 + p_4p_5 + p_3p_4 + p_2p_5), \\ \alpha_2\alpha_3 = p_1^2 + \cdots + p_5^2 + (C + D)(p_1p_2 + p_1p_3 + p_4p_5 + p_3p_4 + p_2p_5) + \\ + (A + B)(p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_1p_4 + p_3p_5). \end{aligned}$$

Имеем $C + D = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $A + B = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $p_1^2 + \cdots + p_5^2 = 9$. Из (1.15) немедленно следует, что

$$p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_1p_4 + p_3p_5 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_4p_5 + p_3p_4 + p_2p_5 = -2 \tag{1.20}$$

[a_1 и a_2 подчиняются одинаковым уравнениям типа (1.15)]. Следовательно,

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 = 11. \tag{1.21}$$

Введем новые обозначения: $y = \alpha_1^3\alpha_2$, $z = \alpha_1^2\alpha_3$. Так как $\alpha_2\alpha_3 = 11$, имеем: $yz = 11\alpha_1^5$. Тогда второе и третье уравнения при новых обозначениях образуют систему

$$\begin{cases} y^2 + y\left(\dfrac{z^2+11z+11^3}{11}\right) + 11z^2 = 0, \\ y^2 + y\left(\dfrac{31\cdot 11z^2}{z^2+11^3}\right) + 11z^2 = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Уравнения системы (1.22) тождественно совпадают при условии $\dfrac{z^2+11z+11^3}{11} = \dfrac{31\cdot 11z^2}{z^2+11^3}$, или же

$$z^4 + 11z^3 - 9\cdot 11^2 z^2 + 11^4 z + 11^6 = 0. \tag{1.23}$$

Многочлен (1.23) разлагается на два многочлена второй степени:

$$\left[z^2 + \frac{11}{2}(1+5\sqrt{5})z + 11^3\right]\left[z^2 + \frac{11}{2}(1-5\sqrt{5})z + 11^3\right] = 0. \tag{1.24}$$

Взяв, например, один из корней трехчлена первой скобки

$$z = \frac{11}{4}\left[(-1-5\sqrt{5}) + i\frac{5(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right], \tag{1.25}$$

получим значение y, а именно:

$$y = \frac{11}{4}\left[(-31-5\sqrt{5}) - i\frac{5(1+3\sqrt{5})}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right].$$

Учитывая, что $yz = 11\alpha_1^5$, очевидно получим значение α_1:

$$\alpha_1 = \left[\frac{11}{4}(89+25\sqrt{5}) + i\frac{5(5-7\sqrt{5})}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\right]^{\frac{1}{5}}. \tag{1.26}$$

Окончательно

$$5p_1 - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + \frac{y}{\alpha_1^2} + \frac{z}{\alpha_1^2} + \frac{11}{\alpha_1}. \tag{1.27}$$

2. Для уравнения $x^{13} - 1 = 0$, переходное уравнение имеет вид

$$f^6(p) = p^6 - p^5 - 5p^4 + 4p^3 + 6p^2 - 3p - 1 = 0.$$

Его разложение по неопределенным коэффициентам:

$$f^6(p) = (p^2 + a_1p + a_2)(p^4 + b_1p^3 + b_2p^2 + b_3p + b_4). \tag{1.28}$$

Относительно a_1, a_2 (1.28) даст совершенно идентичные уравнения 15-й степени (число возможных сочетаний вида $a_1 = -(p_i + p_j)$; $a_2 = p_lp_k$ равно $\dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$).

В отличие от случая $n = 11$ этот случай допускает возможность существования делителя 3-й степени с целыми коэффициентами для уравнений $f^{15}(a_1) = 0$, $f^{15}(a_2) = 0$.

Вычислим многочлен $f^3(a_1)$ исходя из уже известных нам свойств переходных уравнений и лишь после этого из (1.28) стандартным способом вычислим $f^{15}(a_1) = 0$ и соответственно $f^3(a_1) = 0$ как подтверждение теоретических соображений. Из 15 сочетаний $-(p_i + p_j)$ для множества значений a_1 или же из 15 значений возможных произведений $p_l p_k$ можно выделить нижеследующие системы троек:

$$\left\{\begin{array}{lll} -(p_1+p_2), & -(p_3+p_4), & -(p_5+p_6) \\ -(p_1+p_3), & -(p_2+p_5), & -(p_4+p_6) \\ -(p_1+p_4), & -(p_3+p_5), & -(p_2+p_6) \\ -(p_1+p_5), & -(p_2+p_4), & -(p_3+p_6) \\ -(p_1+p_6), & -(p_4+p_5), & -(p_2+p_3) \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{lll} p_1p_2, & p_5p_6, & p_3p_4 \\ p_1p_3, & p_2p_5, & p_4p_6 \\ p_1p_4, & p_3p_5, & p_2p_6 \\ p_1p_5, & p_2p_4, & p_3p_6 \\ p_1p_6, & p_4p_5, & p_2p_3 \end{array}\right. . \tag{1.29}$$

Пусть искомый кубический многочлен имеет вид

$$f^3(a_1) = a_1^3 + k_1 a_1^2 + k_2 a_1 + k_3. \tag{1.30}$$

Из 15 возможных сочетаний одна из представленных троек должна обеспечивать (1.30) с целыми коэффициентами k_1, k_2, k_3. Но сумма элементов любой тройки удовлетворяет условию $-(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) = -1 = -k_1$. Следовательно, $k_1 = 1$. Так как a_1, a_2 должны удовлетворять одинаковым уравнениям 15-й степени, их делители также должны совпадать. Но из второй колонки (1.29) следует, что с одной стороны $(p_1p_2) \cdot (p_3p_4)(p_5p_6) = -k_3$, а с другой [из (1.39)] $p_1p_2p_3p_4p_5p_6 = -1$. Следовательно, свободные члены и для $f^3(a_1)$ и $f^3(a_2)$ равны $k_3 = 1$. Значение k_2 также можно легко найти. Имеем

$$k_2 = (p_1+p_2)(p_5+p_6) + (p_1+p_2)(p_3+p_4) + (p_5+p_6)(p_3+p_4). \tag{1.31}$$

У нас 12 слагаемых $p_l p_k$, причем среди них не могут быть p_i^2, следовательно, согласно тождествам $p_l p_k = -(p_i + p_j)$ у нас 24 свободных различных значений корней $p_1, p_2, \ldots, p_6$. Иначе $k_2 = -4(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6) = -4 \cdot 1 = -4$. Итак, явный вид многочленов $f^3(a_1)$, $f^3(a_2)$ известен:

$$f^3(a_1) = a_1^3 + a_1^2 - 4a_1 + 1 = 0; \quad f^3(a_2) = a_2^3 + a_2^2 - 4a_1 + 1 = 0. \tag{1.32}$$

Пусть a_1 один из корней $f^3(a_1)$. Тогда a_2 выбирается из двух других корней: $a_1 \neq a_2$. Два корня уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$ дадут искомые корни переходного уравнения.

По методу неопределенных коэффициентов из (1.28) относительно a_1 получим

$$f^{15}(a_1) = a_1^{15} + 5a_1^{14} - 10a_1^{13} - 78a_1^{12} - 13a_1^{11} + 377a_1^{10} + 299a_1^9 - 676a_1^8 - 741a_1^7 + \\ + 390a_1^6 + 585a_1^5 + 13a_1^4 - 117a_1^3 - 17a_1^2 + 6a_1 + 1 = 0. \tag{1.33}$$

(1.33) действительно нацело делится на $f^3(a_1) = a_1^3 + a_1^2 - 4a_1 + 1$.

3. Уравнение $x^{17} - 1 = 0$ решается также тривиально, однако так как $n = 17$ число Ферма, вычисление первообразных корней стоит довести до конца. Если переходное уравнение $p^8 - p^7 - 7p^6 + 6p^5 + 15p^4 - 10p^3 - 10p^2 + 4p + 1 = 0$ представить в виде

$$f^8(p) = (p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4)(p^4 + b_1p^3 + b_2p^2 + b_3p + b_4), \tag{1.34}$$

то a_1 может принимать 70 значений, ибо a_1 представляет множество возможных сумм $-(p_i + p_j + p_l + p_k)$ [2]. Следовательно, из (1.34) относительно a_1 следует уравнение степени 70. Однако этот многочлен должен обладать делителем 2-й степени с целыми коэффициентами. Действительно, из восьми корней $p_1, p_2, \ldots, p_8$ можно составить две группы корней с условными индексами $\eta_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$; $\eta_2 = -(p_5 + p_6 + p_7 + p_8)$.

Пусть искомый трехчлен имеет вид $a_1^2 + k_1a_1 + k_2$. Тогда очевидно, что $k_1 = (p_1 + \ldots + p_4) + (p_5 + \ldots + p_8) = 1$. Так как $p_lp_k = -(p_i + p_j)$, то $\eta_1\eta_2 = k_2$ содержит 16 значений p_lp_k или же 32 свободных значения p_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ со знаком (−). Это означает, что $k_2 = -(4p_1 + 4p_2 + \ldots + 4p_8) = -4(p_1 + \ldots + p_8) = -4$. Получено первое звено цепи разрешающих уравнений Гаусса: $f^2(a_1) = a_1^2 + a_1 - 4 = 0$. В (1.34) очевидно, что коэффициенты a_1, a_2 подчиняются различным уравнениям. Если же разложение переходного уравнения осуществить стандартным подходом этой статьи, а именно:

$$f^8(p) = (p^2 + a_1p + a_2)(p^6 + b_1p^5 + b_2p^4 + b_3p^2 + b_4p^2 + b_5p + b_6), \tag{1.35}$$

то коэффициенты a_1, a_2 будут корнями одного и того же уравнения 28-й степени, ибо $\dfrac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$, причем a_1 уже представляет все множество возможных сумм вида $a_1 = -(p_i + p_j)$, a_2 представляет множество значений всевозможных произведений $a_2 = p_lp_k$. Многочлен 28-й степени относительно a_1 и a_2 допускает возможность существования делителя 4-й степени с целыми коэффициентами. Пусть искомый многочлен имеет вид $f^4(a_1) = a_1^4 + k_1a_1^3 + k_2a_1^2 + k_3a_1 + k_4$. Рассмотрим нижеследующие сочетания по условным индексам

$$\begin{aligned} &\eta_1 = -(p_1 + p_2); \quad \eta_2 = -(p_3 + p_4); \quad \eta_3 = -(p_5 + p_6); \quad \eta_4 = -(p_7 + p_8); \\ &\delta_1 = p_1p_2; \qquad \delta_2 = p_3p_4; \qquad \delta_3 = p_5p_6; \qquad \delta_4 = p_7p_8. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Для k_1 и k_4 возможные результаты очевидны:

$$k_1 = -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1.$$

Так как $f^4(a_1) \equiv f^4(a_2)$, то и соответствующие коэффициенты должны быть одинаковые. Следовательно, $k_4 = p_1p_2 \cdot p_3p_4 \cdot p_5p_6 \cdot p_7p_8 = 1$. В состав $k_2 = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4$ входят 24 слагаемых p_lp_k $(l \neq k)$, и, учитывая тождество $p_lp_k = -(p_i + p_j)$, можем утверждать, что выражение для k_2 содержит 48 слагаемых отдельных p_i в симметрической форме. Следовательно, $k_2 = -6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8) = -6$. Коэффициент же k_3 образуется как $-k_3 = \eta_1\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_2\eta_4 + \eta_1\eta_3\eta_4 + \eta_2\eta_3\eta_4$. Каждое слагаемое должно нести одинаковую информацию. Например, $\eta_1\eta_2\eta_3$ очевидно образуется как результат произведения $\eta_1\eta_3 \cdot \eta_2$ или же $\eta_1\eta_2 \cdot \eta_3$, следовательно, результат от произведения любых двух пар из трех дает 8 значений p_i и умножение на третий элемент (скажем η_2) дает 16 произведений типа p_lp_k. Очевидно, что тогда должны быть и совпадающие индексы. Так как k_3 содержит ровно 4 слагаемых, то вклад по совпадающим индексам у каждого слагаемого по два элемента. Из этого немедленно следует, что 14 значений $(16-2)$ p_lp_k согласно тождеству $p_lp_k = -(p_i + p_j)$ дают 28 значений свободных p_i, общее число которых для k_3 будет $28 \cdot 4 = 112$. Окончательно

$$-k_3 = \left[(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \ldots + p_8^2) - \frac{112}{8}(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_8)\right] = 15 - 14 = 1$$

[ведь свободные p_i входят со знаком $(-)$]. Таким образом, разложение (1.35) обеспечивает существование делителей 4-й степени вида

$$a_1^4 + a_1^3 - 6a_1^2 - a_1 + 1 = \left[a_1^2 + \frac{1+\sqrt{17}}{2}a_1 - 1\right]\left[a_1^2 + \frac{1-\sqrt{17}}{2}a_1 - 1\right]. \tag{1.37}$$

Разложение переходного уравнения через квадратные трехчлены имеет вид

$$\begin{aligned} f^8(p) &= p^8 - p^7 - 7p^6 + 6p^5 + 15p^4 - 10p^3 - 10p^2 + 4p + 1 = \\ &= \left[p^2 + \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{4}p + \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{4}\right] \times \\ &\times \left[p^2 + \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{4}p + \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{4}\right] \times \\ &\times \left[p^2 + \frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{4}p + \frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{4}\right] \times \\ &\times \left[p^2 + \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}}{4}p + \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}{4}\right]. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Если корни квадратных уравнений подобрать как (p_1, p_2); (p_3, p_4); (p_5, p_6); (p_7, p_8) соответственно, то путем непосредственного вычисления легко можно убедиться, что действительно

$$p_1p_2 = -(p_7 + p_8); \quad p_3p_4 = -(p_5 + p_6); \quad p_5p_6 = -(p_1 + p_2); \quad p_7p_8 = -(p_3 + p_4).$$

Алгоритм нахождения переходного многочлена для уравнения $x^n - 1 = 0$, где n любое нечетное число, такой:
а) абсолютные значения коэффициентов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ переходного многочлена $f^{\frac{n-1}{2}}(p) = f^l(p) = p^l + \eta_1 p^{l-1} + \eta_k p^{l-k} + \ldots + \eta_l$ определяются по правилу: если k четное число, то $\eta_k = \dfrac{\left(l - \dfrac{k}{2}\right)!}{(l-k)!\left(\dfrac{k}{2}\right)!}$, если же k нечетное число, то $\eta_k = \dfrac{\left(l - \dfrac{k+1}{2}\right)!}{(l-k)!\left(\dfrac{k-1}{2}\right)!}$;
б) знаки коэффициентов $\eta_k\,(k = 1, 2, \dots, l)$ определяются по последовательности $(-, -, +, +, -, -, +, +, \dots)$.

Московский физико-технический университет

Л. В. Акопян, В. С. Акопян

Решение уравнения деления круга без периодов Гаусса

Предложен и теоретически обоснован иной подход для нахождения первообразных числовых корней уравнения деления круга в радикалах при любой степени n. Отправной точкой в предлагаемой теории является теорема об основных лианитовых корнях алгебраических уравнений. Приводятся подробный анализ и конкретное вычисление первообразных корней уравнения $x^n - 1 = 0$, для случаев $n = 11, 13, 17$, без использования методов теории групп.

Լ. Վ. Հակոբյան, Վ. Ս. Հակոբյան

Շրջանի բաժանման հավասարման լուծումը առանց Գաուսի պարբերությունների

Առաջարկված եւ փեսականորեն հիմնավորված է նոր մոփեցում՝ շրջանի հավասար մասերի բաժանման հավասարման նախակերպային արմափները արմափանշաններով գփնելու համար:

Առաջարկվող փեսության համար ելակետային է հանրահաշվական հավասարումների հիմնական լիանիտային արմատների մասին թեորեմը: Մանրամասն վերլուծություն եւ կոնկրետ հաշվարկ է ներկայացված $x^n - 1 = 0$, հավասարման համար $n = 11, 13, 17$ դեպքերում՝ առանց խմբերի փեսության մեթոդների օգտագործման:

L. V. Hakobyan, V. S. Hakobyan

Sollution of Cyclotomic Equations without Gauss Periouds

A new approach for seeking the numeric roots to the cyclotomic equations in radicals at arbitrary degrees n is suggested. The starting point in the suggested approach was the theorem of principal lianit roots of algebraic equations published in our earlier works. An in-depth and complete analysis and analytic calculation of the roots of the unity for cases of $n = 11, 13, 17$ is provided.

Литература

1. *Акопян Л.В.* - Ученые записки ЕГУ. 2007. N2. С. 23-34; 2007. N3. С. 33-43.
2. *Акопян Л.В.* - ДНАН РА. 2008. Т. 108. N2. С. 133-141.
3. *Постников М.М.* Теория Галуа. Физматгиз. М. 1963.
4. *Ван Дер Варден Б.Л.* Алгебра. М. Наука. 1979.