ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 514.752.44

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах

(Представлено академиком В.С. Захаряном 24/V 2010)

Ключевые слова: *Ric-полусимметрические многообразия, эйнштейновы подмногообразия, полуэйнштейновы подмногообразия*

Римановы Ric-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями полусимметрических, эйнштейновых и симметрических многообразий. В этой связи эти многообразия и их изометрические погружения были предметом исследований многих авторов [1,2]. К классу Ric-полусимметрических многообразий относятся эйнштейновы и полуэйнштейновы многообразия. В [3-6] автором даны геометрическое описание и классификация некоторых классов нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий в евклидовых пространствах. Настоящая работа является продолжением этих исследований. Основная цель — геометрическое описание полуэйнштейновых подмногообразий с равными модулями главных векторов кривизны. Дается также общее геометрическое описание локальной структуры нормально плоских подмногообразий, изучаются свойства их главных векторов кривизны, а также соответствующих им собственных распределений в касательном расслоении подмногообразия.

Пусть M — риманово многообразие с тензором кривизны R, а x — его произвольная точка. Подпространство $T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M); R(X,Y) = 0 \ \forall Y \in T_x(M)\}$ касательного пространства $T_x(M)$ называется *пространством дефектности* многообразия M в точке x. Размерность $\mu_x = dim T_x^{(0)}$ называется *индексом дефектности* многообразия M в этой точке. Предполагая, что локально μ_x является постоянным, через $T^{(0)}$ будем обозначать соответствующее распределение, которое называется распределением дефектности. Распределение $T^{(0)}$ является интегрируемым, а его интегральное многообразие $M^{(0)}$ является локально евклидовым в индуцированной метрике и вполне геодезическим в M [7] (последнее утверждение следует из формулы (45) в [7]). Ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ пространства $T_x^{(0)}$ в касательном пространстве $T_x(M)$ относительно римановой метрики на M называется пространством кодефектности в точке x, а его размерность — индексом кодефектности (или просто кодефектностью) многообразия M в этой точке. Отметим, что $dim T_x^{(1)} \geq 2$. Пространство $T_x^{(1)}$ инвариантно относительно операторов кривизны $R(X,Y)$, а также относительно тензора Риччи R_1. Поскольку пространство $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора Риччи R_1, отвечающих нулевому собственному значению, то в каждой точке $x \in M$ тензор R_1 имеет два инвариантных подпространства — $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ и справедливо следующее разложение в прямую сумму: $T_x(M) = T_x^{(0)} + T_x^{(1)}$. Риманово многообразие M с ненулевым индексом дефектности называется полуэйнштейновым, если тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение [8]. Выясним геометрический смысл условия полуэйнштейновости. Если n-мерное риманово многообразие M является полуэйнштейновым и ортонормированный репер $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ выбран так, что $e_i \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^{(1)}$ ($i = 1, \dots, \mu$, $\alpha = \mu+1, \dots, n$), то в этом репере матрица $\|R_{CB}\|$ тензора Риччи имеет диагональный вид с диагональными элементами 0 и ρ, а среди компонент тензора кривизны R отличными от нуля могут быть только компоненты вида $R^\beta_{\alpha\delta\gamma}$. Тогда секционная кривизна $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ равна $R^\beta_{\alpha\beta\alpha}$ (нет суммирования) и, следовательно,

$$\sum_{\substack{\beta \\ \beta\neq\alpha}} k(e_\alpha \wedge e_\beta) = R^\beta_{\alpha\beta\alpha} = R_{\alpha\alpha} = \rho.$$

Итак, *если многообразие M является полуэйнштейновым, то в каждой точке при каждом фиксированном значении индекса α сумма всех секционных кривизн $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ принимает одно и то же ненулевое значение (зависящее, вообще говоря, от точки на M). Верно и обратное утверждение. Если $dim T_x^{(1)} = 3$, то условие полуэйнштейновости равносильно равенству всех секционных кривизн $k(e_\alpha \wedge e_\beta)$ между собой.* Если $dim T_x^{(1)} = 2$, то M является полуэйнштейновым. За всеми остальными сведениями отсылаем к [9, 10].

Пусть $O(E_n)$ — главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n. Отождествляя точку x с её радиус-вектором, будем иметь

$$dx = \omega^A e_A, de_A = \omega^B_A e_B, \omega^A_B + \omega^B_A = 0, A, B, C = 1, \dots, n, d\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B, d\omega^B_A = \omega^C_A \wedge \omega^B_C.$$

Пусть M является m-мерным подмногообразием в E_n. Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $i, j, k = 1, \dots, m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta = m+1, \dots, n$, где $T_x^\perp(M)$ — нормальное пространство в точке x. В силу этого будем иметь

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j,\ h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k,\ h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (= \overline{\nabla}_k h_{ij}^\alpha),$$

$$\overline{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k,\ \overline{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k.$$

Здесь h_{ij}^α являются компонентами второй фундаментальной формы α_2. Индексом относительной дефектности v_x подмногообразия M в точке $x \in M$ называется размерность подпространства T'_x касательного пространства $T_x(M)$, определяемого равенством $T'_x = \{X \in T_x(M);\ \alpha_2(X, Y) = 0\ \forall Y \in T_x(M)\}$. Имеет место включение $T'_x \subset T_x^{(0)}$. Формулы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,\ \Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$$

$$R_{ikl}^j = -\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = -\sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta$$

определяют формы кривизны и компоненты тензоров кривизны R и $R^\perp$ римановой связности на M и нормальной связности. Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 определяются по формуле $R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum\limits_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha)$, где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ — компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют и в силу этого в некотором ортонормированном репере они могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда

$$R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}, \quad \rho_i = \sum_\alpha \lfloor (\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha \rfloor.$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны нормально плоского подмногообразия в E_n. Легко видеть, что $H = n_1 + \ldots + n_m$.

Пусть в каждой точке x нормально плоское m-мерное подмногообразие M в E_n имеет q различных главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ соответственно, $p_1 + \ldots + p_q = m$. Через $F_x^{(\varphi)}$ $(\varphi = 1, \dots, q)$ обозначим p_φ-мерное подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет только одно собственное значение кратности p_φ. Это собственное значение мы будем обозначать через $\lambda_{(\varphi)}^\alpha$. Именно в указанном выше смысле будем говорить, что $F_x^{(\varphi)}$ является собственным подпространством, соответствующим главному вектору кривизны n_φ. Через

$F^{(\varphi)}$ будем обозначать соответствующее распределение. Справедливо следующее разложение в прямую сумму: $T_x(M) = F_x^{(1)} + \ldots + F_x^{(q)}$. В дальнейшем будем предполагать, что в некоторой области на подмногообразии M подпространства $F_x^{(\varphi)}$ имеют постоянные размерности.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $dimF_x^{(\varphi)} = p_\varphi \geq 2$, то распределение $F^{(\varphi)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие представляет собой либо p_φ-мерную плоскость, либо p_φ-мерную сферу.*

Теорема 2. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское подмногообразие M локально несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из плоскости (или прямой), сфер и линий кривизны (отличных от прямых).*

Теорема 3. *Если $F_x^{(\varphi)}$ содержится в $T_x^{(0)}$ и отлично от T_x', то $dimF_x^{(\varphi)} = p_\varphi = 1$.*

Теорема 4. *Пространство дефектности $T_x^{(0)}$ нормально плоского подмногообразия M в евклидовом пространстве E_n является прямой суммой пространства относительной дефектности T_x' и некоторых одномерных подпространств $F_x^{(\varphi)}$.*

Следствие 1. *Если $dimF_x^{(\varphi)} \geq 2$ для всех $F_x^{(\varphi)}$, отличных от T_x', то T_x' совпадает с $T_x^{(0)}$ и, следовательно, $\mu = \nu$.*

Теорема 5. *Пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ нормально плоского подмногообразия M в евклидовом пространстве E_n является прямой суммой одномерных и многомерных подпространств $F_x^{(\varphi)}$, отличных от T_x'.*

Эти теоремы описывают структуру пространств $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ в самом общем случае.

Следствие 2. *Для любого нормального вектора $\xi = \xi^\alpha e_\alpha$ нормально плоского подмногообразия M в E_n пространства $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(1)}$ являются инвариантными подпространствами матрицы $\|\xi_\alpha h_{ij}^\alpha\|$, где $\xi_\alpha = \xi^\alpha$.*

Поскольку распределение $T^{(0)}$ является геодезическим, то справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 6. *Интегральное многообразие распределения дефектности $T^{(0)}$ нормально плоского подмногообразия M является локально евклидовым нормально плоским подмногообразием в E_n и несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из плоскости (или прямой) и линий кривизны (отличных от прямых). Эта система является проекцией естественной ортогональной сопряженной системы, которую несет M.*

Эти теоремы дают основание для следующего определения: главный вектор кривизны n_φ будем называть *регулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(1)}$ и *сингулярным*, если $F_x^{(\varphi)} \subset T_x^{(0)}$. Размерность линейной оболочки регулярных векторов n_φ будем называть *индексом регулярности* и обозначать через i_R, а число ненулевых сингулярных векторов n_φ — *индексом сингулярности* подмногообразия M и обозначать через i_S. Справедлива следующая

Теорема 7. *Сингулярные главные векторы кривизны нормально плоского подмногообразия являются однократными. Они ортогональны друг другу, а также регулярным главным векторам кривизны.*

Справедливо следующее неравенство: $0 \leq \mu - \nu + i_R \leq n - m$, где фактически $\mu - \nu = i_s$. На основании этого неравенства можем доказать следующее утверждение.

Теорема 8. *Если гиперповерхность в E_n не является локально евклидовой, то ее индекс дефектности равен индексу относительнной дефектности (равенство $\mu = \nu = 0$ не исключается). Если гиперповерхность в E_n является локально евклидовой, то $\mu = m$ и, следовательно, $m - \nu \leq 1$ или $m - 1 \leq \nu \leq m$; из этого неравенства следует, что локально евклидова гиперповерхность представляет собой гиперплоскость (при $\nu = m$) или является гиперповерхностью ранга 1 (при $\nu = m - 1$); в частности, если $\nu = 0$, т.е. гиперповерхность не содержит прямых, то $m = 1$ и гиперповерхность представляет собой кривую на плоскости.*

Пусть $dim T_x^{(0)} = \mu$, $dim T_x^{(1)} = m - \mu$ и пусть адаптированный к M ортонормированный репер $\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ выбран так, что $e_a \in T_x^{(1)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, где $a, b, c = 1, \ldots, p = m - \mu$, $r, s, t = p + 1, \ldots, m$, $\alpha = m + 1, \ldots, n$.

Лемма 1. *Ненулевые главные векторы кривизны n_r нормально плоского неминимального подмногообразия M в E_n образуют с вектором средней кривизны H острые углы и имеют равные модули тогда и только тогда, когда все эти углы равны между собой.*

Лемма 2. *Пусть главные векторы кривизны n_a и n_r нормально плоского неминимального подмногообразия M в E_n удовлетворяют следующим условиям: (а) $|n_r|^2 - |H||n_r|\cos\varphi_r = 0$, где φ_r — угол между H и n_r, (б) n_a имеют равные модули, образуют с H угол φ и $\tau^2 - |H|\tau\cos\varphi \neq 0$, где $\tau = |n_a|$. Тогда M является полуэйнштейновым подмногообразием.*

Лемма 3. *Если главные векторы кривизны n_a нормально плоского неминимального полуэйнштейнова подмногообразия M в E_n имеют равные модули, то они образуют равные углы с вектором средней кривизны H. Обратно, если векторы n_a образуют с H один и тот же угол φ, то или все они имеют равные модули, или разбиваются на две группы, которые обладают следующими свойствами:*
(а) векторы, принадлежащие одной и той же группе, имеют равные модули,
(б) для всяких двух векторов n_a и n_b из разных групп выполняются следующие

условия:

$$|n_a| \neq |n_b|, \quad |n_a| + |n_b| = |H|\cos\varphi, \quad |n_a| \cdot |n_b| = -\rho,$$

где ρ — ненулевое собственное значение тензора Риччи.

Теорема 9. *Пусть нормально плоское подмногообразие M в E_n является полуэйнштейновым и имеет q $(q \geq 2)$ регулярных главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$ с кратностями $p_1, \dots, p_q$ и равными модулями, т.е. $|n_\varphi| = \sqrt{\tau}$ $(\varphi = 1, \dots, q)$. Если θ_φ^ψ — угол между векторами n_φ и n_ψ, то $p_\psi \cos\theta_\varphi^\psi = \sigma\tau^{-1}$, где $\sigma = \langle H, n_\varphi \rangle$ и не зависит от φ. Если углы между векторами n_φ попарно равны, т.е. $\theta_\varphi^\psi = \theta$, то $p_1 = \ldots = p_q$ и справедлива следующая формула:*

$$\cos\theta = \frac{q\sigma}{\tau(q-1)(m-\mu)} - \frac{1}{q-1}.$$

Известно, что если в E_n нормально плоское подмногообразие M имеет только один ненулевой главный вектор кривизны, то оно локально является или сферой, или локально евклидовым подмногообразием (но не плоскостью), или цилиндром над сферой, или конусом над сферой, или прямым произведением плоскости и конуса над сферой. *Можно доказать, что если нормально плоское полуэйнштейново подмногообразие M в E_n имеет только два ненулевых главных вектора кривизны n_1, n_2 кратностей $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, то локально оно является или полусимметрическим, или представляет собой прямое произведение некоторой плоскости и конуса над прямым произведением двух сфер.*

Следующая теорема обобщает результаты автора, полученные в [5] и [6].

Теорема 10. *Пусть в евклидовом пространстве E_n m-мерное нормально плоское неминимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке $x \in M$ только $q \geq 2$ различных ненулевых главных векторов кривизны $n_1, \dots, n_q$, которые имеют равные модули и кратности $p_1 \geq 1, \dots, p_q \geq 2$ соответственно. Если распределение кодефектности $T^{(1)}$ подмногообразия M является интегрируемым с интегральным многообразием $M^{(1)}$, то M локально представляет собой или цилиндр над $M^{(1)}$, т.е. $M = E_\mu \times M^{(1)}$, где E_μ — плоскость размерности μ, или имеет вид прямого произведения $E_{\mu-1} \times \tilde{M}$, где $E_{\mu-1}$ — плоскость размерности $\mu - 1$, а $\tilde{M}$ — $(p_1 + \ldots + p_q + 1)$-мерное полуэйнштейново подмногообразие, которое является конусом над $M^{(1)}$, причем в последнем случае $M^{(1)}$ принадлежит некоторой гиперсфере пространства E_n. В обоих случаях $M^{(1)}$ является или прямым произведением q сфер $S^{p_1}(R), \dots, S^{p_q}(R)$, или скрученным произведением этих сфер, или имеет вид прямого произведения $N_0 \times N_1 \times \ldots \times N_u$, где N_0 есть прямое произведение некоторых из этих сфер, а $N_1, \dots, N_u$ представляют собой скрученные произведения различных групп остальных сфер (при $q = 2$*

$M^{(1)}$ всегда является прямым произведением сфер $S^{p_1}(R)$ и $S^{p_2}(R)$). Более того $M^{(1)}$, как подмногообразие в E_n, во всех случаях имеет плоскую нормальную связность и является эйнштейновым.

В теореме 10 под скрученным произведением сфер имеется в виду такое неприводимое подмногообразие в E_n, которое локально несет ортогональную сопряженную систему из $q \geq 3$ сфер, вращающихся друг относительно друга при движении вдоль этого подмногообразия.

Государственный инженерный университет Армении

В. А. Мирзоян

Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах

Дано геометрическое описание нормально плоских полуэйнштейновых подмногообразий с равными модулями главных векторов кривизны в евклидовых пространствах. Исследованы свойства этих векторов и соответствующих им собственных распределений.

Վ. Ա. Միրզոյան

Նորմալ հարթ կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ էվկլիդեսյան տարածություններում

Տրված է նորմալ հարթ կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը էվկլիդեսյան տարածություններում գլխավոր կորության վեկտորների մոդուլների հավասարության դեպքում: Հետազոտված են այդ վեկտորների եւ նրանց համապատասխանող սեփական բաշխումների հատկությունները:

V. A. Mirzoyan

Normally Flat Semi-Einstein Submanifolds in Euclidean Spaces

A geometric description of normally flat semi-Einstein submanifolds with equal moduli of principal curvature vectors in Euclidean spaces is given. The properties of these vectors and the corresponding eigen distributions are inverstigated.

Литература

1. *Мирзоян В. А.* - Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 29-66.

2. *Lumiste U.* Semiparallel submanifolds in space forms. New York: Springer. 2009.

3. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2000.Т.191. N 9. С. 65-80.

4. *Мирзоян В. А.* - Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. N5. С. 107-124.

5. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2006. Т. 197. N7. С. 47-76.

6. *Мирзоян В. А.* - Матем. сб. 2008. Т. 199. N3. С. 69-94.

7. *Chern S. S., Kuiper N.* - Ann. of Math. 1952. V. 56. N3. P. 422-430.

8. *Мирзоян В. А.* - Изв. вузов. Сер. матем. 1992. N6. С. 80-89.

9. *Chen B. - У.* Geometry of submanifolds. New York: Marcel Dekker. 1973.

10. *Chern S. S., Chen W. H., Lam K. S.* Lectures on differential geometry. Singapore. World Scientific. 2000.