

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Р. М. Киракосян

**Задачи ортотропных пластинок-полос
при действии касательных поверхностных нагрузок**

(Представлено академиком Л.А. Агаловяном 11/II 2010)

Ключевые слова: *пластинка-полоса, поправочные коэффициенты, касательные напряжения, поперечные сдвиги, форма распределения*

Сдвиговая теория первого порядка [1] влияние поперечных сдвигов учитывает с помощью перерезывающих сил. Поэтому в случае самоуравновешенных поперечных касательных напряжений, когда перерезывающие силы равны нулю, эта теория поправки к классическим значениям расчетных величин пластинки не дает. Теория же рассмотренная в [2], влияние поперечных сдвигов учитывает в связи с характером изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. В силу этого она приводит к поправкам и в случае равенства нулю перерезывающих сил.

В настоящей статье в рамках теории [2] получают аналитически замкнутые решения четырех задач ортотропных пластинок-полос, несущих касательные поверхностные нагрузки.

1. В сдвиговой теории первого порядка [1] для цилиндрического изгиба пластин принимается

$$u_x = z\varphi(x), \quad u_z = w(x). \quad (1.1)$$

Здесь x – планарная, z – поперечная координаты, u_x, u_z – перемещения, φ – угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости xOz .

В работе [2] с применением теоремы виртуальных работ получены выражения поправочных коэффициентов, которые позволяют влияние поперечных сдвигов учитывать в связи с характером изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. В задачах цилиндрического изгиба получается соотношение

$$Q_x = \frac{5}{6} B_{55} h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{X_1 h}{6}, \quad (1.2)$$

где Q_x – перерезывающая сила, B_{55} – модуль сдвига материала в плоскости xOz , h – толщина пластинки. Величина X_1 выражается через проекции касательных поверхностных нагрузок X^\pm формулой [3]

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}. \quad (1.3)$$

Знаки „+” и „-” относятся к поверхностям $z = \pm h/2$ соответственно.

Изгибающий момент цилиндрически изгибаемой пластинки имеет вид

$$M_x = D_{11} \frac{d\varphi}{dx} \quad \left(D_{11} = \frac{B_{11} h^3}{12} \right), \quad (1.4)$$

B_{11} выражается через механические параметры материала известной формулой [3].

Из уравнений равновесия дифференциального элемента срединной плоскости пластинки получается разрешающая система дифференциальных уравнений, которая в случае цилиндрического изгиба принимает вид [2]

$$\begin{aligned} B_{55} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= -\frac{1}{5} \frac{dX_1}{dx}, \\ D_{11} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{5}{6} B_{55} h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) &= -\frac{5}{6} X_1 h. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наиболее часто встречающиеся краевые условия при цилиндрическом изгибе пластин принимают вид:

а) жестко заделанный край

$$w = 0, \quad \varphi = 0, \quad (u_x = 0); \quad (1.6)$$

б) шарнирно опертый край

$$w = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (M_x = 0); \quad (1.7)$$

в) свободный край

$$5B_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) + X_1 = 0, \quad (Q_x = 0), \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (M_x = 0). \quad (1.8)$$

В рамках теории [1] вместо системы (1.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} &= 0, \\ D_{11} \frac{d^2\varphi}{dx^2} - B_{55}h \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) &= -X_1h. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из краевых условий отличается только первое условие свободного края (1.8), которое имеет вид

$$\varphi + \frac{dw}{dx} = 0, \quad (Q_x = 0). \quad (1.10)$$

Следует отметить, что в статически определимых задачах вместо системы разрешающих уравнений достаточно использовать выражения перерезывающей силы и изгибающего момента с соответствующими краевыми условиями. Так будем поступать при решении ниже рассматриваемых первых трех задач.

2. Пластика-полоса закреплена вдоль края $x=0$ и свободна при $x=l$. Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки $X^+ = -\tau$, $X^- = \tau$ (рис.1). Задача статически определима. Из условий статики следует

$$Q_x \equiv 0, \quad M_x = -\tau h(l-x). \quad (2.1)$$

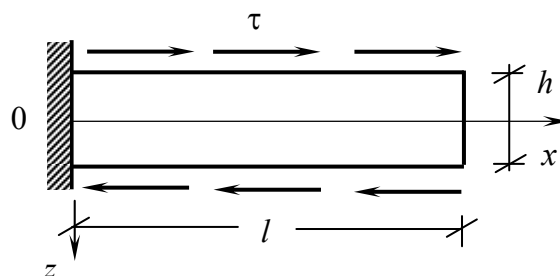


Рис. 1

Имея в виду, что $X_1 = -\tau$, с учетом (2.1) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\tau h}{D_{11}}(l-x). \quad (2.2)$$

Из этих уравнений при краевых условиях

$$w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0 \quad (2.3)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h x}{2D_{11}}(2l-x), \quad w = \frac{\tau h}{6D_{11}}x^2(3l-x) + \frac{\tau x}{5B_{55}}. \quad (2.4)$$

Для наибольшего прогиба получим

$$w_0 = w|_{x=l} = \frac{\tau h l^3}{3D_{11}} \left(1 + \frac{1}{20} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (2.5)$$

Относительная поправка к наибольшему прогибу составляет

$$\alpha = \frac{\Delta w_0}{w_0^{кл.}} = \frac{1}{20} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (2.6)$$

Здесь Δw_0 – абсолютная поправка наибольшего прогиба, $w_0^{кл.}$ – наибольший прогиб по классической теории пластин.

3. Пластинка-полоса шарнирно оперта вдоль краев $x=0$ и $x=l$ (рис. 2). Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки, симметричные относительно сечения $x=l/2$:

$$X^+ = \begin{cases} -\tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}, \quad X^- = \begin{cases} \tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ -\tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}. \quad (3.1)$$

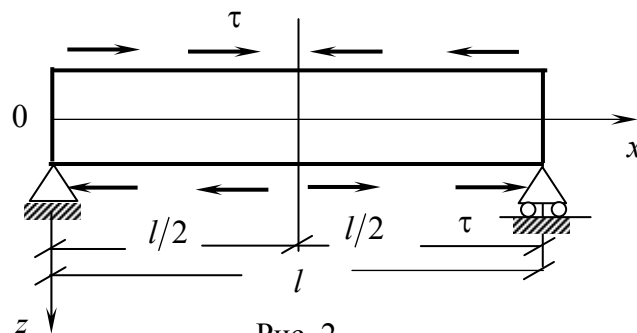


Рис. 2

Параметр нагрузки X_1 будет

$$X_1 = \begin{cases} -\tau, & 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ \tau, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases} \quad (3.2)$$

Из-за симметрии рассмотрим лишь одну половину пластинки-полосы, например, участок $0 \leq x < \frac{l}{2}$. Из условий статики следует

$$Q_x \equiv 0, \quad M_x = \tau hx, \quad 0 \leq x < \frac{l}{2}. \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau hx}{D_{11}}. \quad (3.4)$$

Интегрировав эти уравнения и удовлетворив условиям

$$w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=l/2} = 0, \quad (3.5)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h}{8D_{11}}(l^2 - 4x^2), \quad w = \frac{\tau hx}{24D_{11}}(3l^2 - 4x^2) + \frac{\tau x}{5B_{55}}. \quad (3.6)$$

Для наибольшего прогиба получим

$$w_0 = w|_{x=l/2}, \quad \frac{\tau hl^3}{24D_{11}} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (3.7)$$

Относительная поправка к наибольшему прогибу составляет

$$\alpha = \frac{1}{5} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2}. \quad (3.8)$$

Заметим, что в сечении симметрии $x = l/2$, где прогиб принимает наибольшее значение, функция dw/dx отлична от нуля –

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2-0} = \frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (3.9)$$

Это левостороннее значение функции dw/dx . Нетрудно убедиться, что в силу симметрии правостороннее значение dw/dx будет

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2+0} = -\frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, в сечении $x = l/2$ функция dw/dx имеет разрыв. Величина этого разрыва составляет

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2+0} - \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2-0} = -\frac{2\tau}{5B_{55}}. \quad (3.11)$$

4. Пластинка-полоса шарнирно оперта вдоль краев $x=0$, $x=l$ и несет линейно-переменные касательные поверхностные нагрузки, симметричные относительно сечения $x=l/2$ (рис. 3).

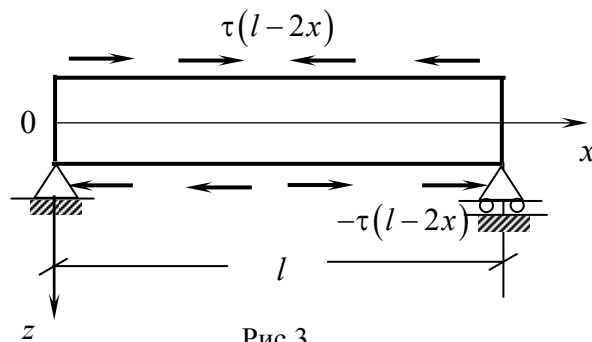


Рис.3

Параметр X_1 имеет вид

$$X_1 = -\tau(l-2x). \quad (4.1)$$

Из условий статики имеем

$$Q_x \equiv 0, \quad M_x = \int_0^x \tau h(l-2x) dx = \tau h x(l-x). \quad (4.2)$$

С учетом (4.1) и (4.2) из (1.2) и (1.4) получим

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\tau(l-2x)}{5B_{55}} - \varphi, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\tau h x}{D_{11}}(l-x). \quad (4.3)$$

Интегрировав уравнения (4.3) и удовлетворив краевым условиям

$$w \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=l} = 0, \quad \left(M_x \Big|_{x=0} = 0 \right). \quad (4.4)$$

находим

$$\varphi = -\frac{\tau h}{12D_{11}}(l^3 - 6lx^2 + 4x^3), \quad w = \frac{\tau h x}{12D_{11}}(l^3 - 2lx^2 + x^3) + \frac{\tau x(l-x)}{5B_{55}}. \quad (4.5)$$

Наибольший прогиб будет

$$w_0 = w \Big|_{x=l/2} = \frac{5\tau h l^4}{192D_{11}} \left(1 + \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (4.6)$$

Относительная поправка наибольшего прогиба составляет

$$\alpha = \frac{4}{25} \frac{B_{11}}{B_{55}} \frac{h^2}{l^2} . \quad (4.7)$$

В сечении симметрии $x=l/2$, где прогиб принимает максимальное значение, имеют место равенства

$$\varphi = \frac{dw}{dx} = 0 . \quad (4.8)$$

В рассмотренных трех задачах, из-за отсутствия перерезывающей силы, теория [1] поправки не дает.

5. Пластинка-полоса закреплена вдоль края $x=0$ и шарнирно оперта вдоль края $x=l$. Она несет равномерно распределенные касательные поверхностные нагрузки (рис.4). Параметр нагрузки X_1 имеет значение

$$X_1 = \tau . \quad (5.1)$$

Задача статически неопределима, в силу чего для ее решения неизбежно надо иметь дело с разрешающей системой уравнений (1.5). При (5.1) эта система приводится к виду

$$\frac{dw}{dx} = C_1 - \varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{5\tau h}{6D_{11}} + \frac{5B_{33}}{6D_{11}} \cdot C_1. \quad (5.2)$$

Здесь C_1 – постоянная, которая появляется в результате интегрирования первого уравнения системы (1.5).

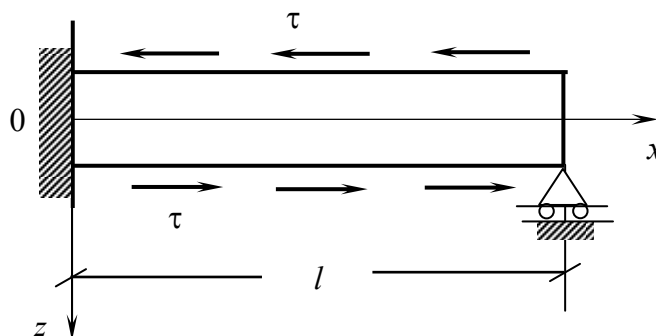


Рис. 4

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = 0, \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad (u_x|_{x=0} = 0), \\ w|_{x=l} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}|_{x=l} = 0, \quad (M_x|_{x=l} = 0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Интегрировав уравнения (5.2) и удовлетворив условиям (5.3), получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{15\tau hx(2l-x)}{2(18D_{11}+5B_{55}hl^2)}, \quad Q_x = \frac{\tau h(3D_{11}+5B_{55}hl^2)}{18D_{11}+5B_{55}hl^2}, \\ M_x &= \frac{15\tau hD_{11}(l-x)}{18D_{11}+5B_{55}hl^2}, \quad w = \frac{5\tau hx(2l^2-3lx+x^2)}{2(18D_{11}+5B_{55}hl^2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Наибольший прогиб получается в сечении

$$X_0 = l \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (5.5)$$

и имеет значение

$$w_0 = w|_{x=x_0} = 0,962 \frac{\tau hl^3}{18D_{11}+5B_{55}hl^2}. \quad (5.6)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем решение этой задачи в рамках теории [1]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{3\tau hx(2l-x)}{2(3D_{11}+B_{55}hl^2)}, \quad Q_x = \frac{B_{55}\tau h^2 l^2}{3D_{11}+B_{55}hl^2}, \\ M_x &= \frac{3\tau hD_{11}(l-x)}{3D_{11}+B_{55}hl^2}, \quad w = \frac{\tau hx(2l^2-3lx+x^2)}{2(3D_{11}+B_{55}hl^2)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Наибольший прогиб также получается в сечении (5.5). Он имеет значение

$$w_0 = w|_{x=x_0} = 0,192 \frac{\tau hl^3}{3D_{11}+B_{55}hl^2}. \quad (5.8)$$

Сравнивая выражения (5.4) и (5.7), замечаем, что прогибы по теории [1] получаются больше, чем по теории [2]. Их отношение составляет

$$\frac{w^{[1]}}{w^{[2]}} = \frac{18D_{11}+5B_{55}hl^2}{15D_{11}+5B_{55}hl^2} > 1. \quad (5.9)$$

Отметим, что функция φ в рамках обеих теорий нулевое значение принимает только в сечении защемления $x=0$.

При $B_{55} \rightarrow \infty$ получаются значения расчетных величин, соответствующие классической теории Кирхгофа, которые, как и следовало ожидать, по теориям [1] и [2] совпадают. Они имеют вид

$$\varphi \equiv 0, \quad Q_x = \tau h, \quad M_x \equiv 0, \quad w \equiv 0. \quad (5.10)$$

В заключение отметим, что во всех рассмотренных в настоящей статье случаях параметр нагрузки

$$X_2 = X^+ + X^- = 0.$$

В силу этого вопрос рассмотрения плоских задач отпадает.

Институт механики НАН РА

Р. М. Киракосян

**Задачи ортотропных пластинок-полос при действии
касательных поверхностных нагрузок**

Решаются четыре задачи изгиба пластинки-полосы при действии касательных поверхностных нагрузок. Полученные аналитически замкнутые решения сравниваются с соответствующими решениями теории, которая не учитывает влияния изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. Делаются количественные и качественные заключения.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

**Օրթոտրոպ սալ-շերտի խնդիրներ՝ մակերեւութային
շոշափող բեռների ազդեցության տակ**

Լուծվում են սալ-շերտի չորս խնդիրներ, երբ սալը գտնվում է մակերեւութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ: Ստացած անալիտիկ փակ լուծումները համեմատվում են այն տեսության շրջանակներում ստացվող լուծումների հետ, որը հաշվի չի առնում սալի հաստությամբ ընդլայնական շոշափող լարումների փոփոխման վարքի ազդեցությունը: Կատարվում են քանակական եւ որակական եզրակացություններ:

R. M. Kirakosyan

**The Problems of Orthotropic Plate-Layer under
the Action of Thangential Surface Loading**

The four problems of orthotropic plate-layer under action of thangential surface loading is considered. The found analitical closed solutions was compared with solutions which corresponded to the theory. The quantitative and qualitative conclusions are made.

Литература

1. *Васильев В.В.* - Изв.РАН. Механика твердого тела. 1998. N3. С. 46-58.
2. *Киракосян Р.М.* - Прикладная механика. 2008. Т. 44. N4. С. 107-119.
3. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.