ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 3

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Академик С. А. Амбарцумян, С. В. Саркисян

О применимости гипотезы Кирхгофа при исследовании задач распространения магнитоупругих волн в пластинке

(Представлено 9/XII 2009)

Ключевые слова: *магнитоупругая пластинка, распространение волн , симметричные и антисимметричные колебания*

Вопросам распространения магнитоупругих волн посвящены многочисленные обзоры и работы. В настоящей статье на основе точного подхода и на основе гипотезы Кирхгофа исследована задача распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящей пластинке. Приведены сравнения полученных результатов с точными решениями.

1. Рассмотрим упругую бесконечную изотропную идеально-проводящую пластинку толщиной $2h$, заключенную между плоскостями $z = \pm h$, свободными от напряжений. Пластинка находится во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0(O, H, O)$ и граничит с вакуумом. Пусть в этой пластинке распространяется периодическая волна с фазовой скоростью a. Уравнение движения в перемещениях при наличии внешнего магнитного поля для идеально-проводящей пластинки имеет вид [1, 2]:

$$c_t^2 \Delta\vec{u} + (c_l^2 - c_t^2)\,\mathrm{graddiv}\ \vec{u} + \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $\vec{F} = \dfrac{\mu_0}{4\pi\rho}(\mathrm{rotrot}(\vec{u} \times \vec{H}_0)) \times \vec{H}_0$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещения, c_l и c_t — скорость распространения продольной и поперечной волны в бесконечном изотропном пространстве, ρ и μ_0 — плотность и коэффициент магнитной проницаемости пластинки.

Ниже будем рассматривать плоскую задачу; перемещения u_1 и u_3 будут независимы от переменной y, а $u_2 \equiv 0$. Представляя перемещения

$u_1(x,z,t)$ и $u_3(x,z,t)$ при помощи продольного $f_1(x,z,t)$ и поперечного $f_2(x,z,t)$ потенциалов [1] из уравнения движения (1.1) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=0,\\ &\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}=0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $c_1^2=c_l^2+v^2$, $c_2^2=c_t^2$, $v=\sqrt{\dfrac{\mu_0 H^2}{4\pi\rho}}$ — скорость Альфвена.

Решение уравнения (1.2) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} f_1(x,z,t)=(A_1\operatorname{sh}v_1 z+A_2\operatorname{ch}v_1 z)\cdot\exp ik(x-at),\\ f_2(x,z,t)=(B_1\operatorname{sh}v_2 z+B_2\operatorname{ch}v_2 z)\cdot\exp ik(x-at),\\ v_\alpha^2=k^2\left(1-\frac{a^2}{c_\alpha^2}\right)\quad(\alpha=1,2), \end{gathered} \tag{1.3}$$

A_1, A_2, B_1 и B_2 — неизвестные постоянные.

Наряду с уравнениями (1.1) следует рассматривать линеаризованные уравнения электродинамики для внешней области (вакуум) , которые для данной задачи сводятся к следующим уравнениям [2,3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\cdot(h_2^{\pm};e_1^{\pm})=0. \tag{1.4}$$

Здесь c — электродинамическая постоянная, h_2 и e_1 компоненты индуцированного электромагнитного поля.

Решения уравнений (1.4) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &h_2^{+}=C_1\exp(-v_3 z+ik(x-at));\ e_1^{+}=C_2\exp(-v_3 z+ik(x-at))\ (z\geq h),\\ &h_2^{-}=C_3\exp(v_3 z+ik(x-at));\ e_1^{-}=C_4\exp(v_3 z+ik(x-at))\ (z\leq -h), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $v_3^2=k^2\left(1-\dfrac{a^2}{c^2}\right)$, C_i — неизвестные постоянные.

На плоскостях $z=\pm h$ имеем следующие поверхностные условия:

$$\sigma_{13}=0;\ \sigma_{33}+T_{33}=T_{33}^{\pm};\ e_1=e_1^{\pm}\ (z=\pm h). \tag{1.6}$$

Здесь σ_{13}, σ_{33} — компоненты тензора напряжений,

$$T_{33}=-\frac{\mu_0}{4\pi}h_2 H,\ T_{33}^{\pm}=-\frac{1}{4\pi}h_2^{\pm}H,$$

а h_2 и e_1 для идеально-проводящей пластинки определяются следующими формулами [3]:

$$h_2=-H\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right);\ e_1=\frac{\mu_0 H}{c}\frac{\partial u_3}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Подставляя (1.3) и (1.5) в граничные условия (1.6), с использованием зависимостей напряжений от поперечного и продольного потенциалов [1] и формул (1.7) получим систему шести линейных однородных уравнений относительно искомых постоянных A_1, A_2, B_1, B_2, C_2 и C_4. Приравнивание определителя этой системы уравнений к нулю приводит к характеристическому уравнению, из которого при заданных значениях ρ, k и λ, μ (коэффициенты Ляме) можно найти фазовую скорость a.

Упростим задачу, рассмотрев две системы частных решений:

$$\begin{aligned} f_{11} &= A_2 \operatorname{ch} v_1 z \cdot \exp ik(x-at), \\ f_{21} &= B_1 \operatorname{sh} v_2 z \cdot \exp ik(x-at), \end{aligned} \tag{1.8}$$

и

$$\begin{aligned} f_{12} &= A_1 \operatorname{sh} v_1 z \cdot \exp ik(x-at), \\ f_{22} &= B_2 \operatorname{ch} v_2 z \cdot \exp ik(x-at). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Нетрудно заметить, что решение (1.8) соответствует симметричному, а (1.9) — антисимметричному виду колебаний, и следовательно, достаточно учесть граничные условия только при $z = h$ [1].

Удовлетворяя в (1.8) граничным условиям (1.6) при $z = h$, из условия существования нетривиального решения системы линейных однородных уравнений получим следующее характеристическое уравнение [5]:

$$\begin{aligned} &(1+\beta_2^2)^2 \operatorname{cth} v_1 h - 4\beta_1\beta_2 \operatorname{cth} v_2 h - \frac{v^2 a^2 \beta_1}{c^2 c_2^2 \beta_3}(\beta_2^2 - 1) = 0, \\ &\beta_\alpha = v_\alpha k^{-1} (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{1.10}$$

В случае антисимметричных колебаний из (1.6), с учетом (1.9), будем иметь следующее характеристическое уравнение:

$$(1+\beta_2^2)^2 thv_1 h - 4\beta_1\beta_2 thv_2 h - \frac{v^2 a^2 \beta_1}{c^2 c_2^2 \beta_3}(\beta_2^2 - 1) = 0. \tag{1.11}$$

Из уравнений (1.10) и (1.11) в случае, когда длина волны $l = 2\pi k^{-1}$ мала по сравнению с толщиной пластинки, получим характеристическое уравнение для поверхностных магнитоупругих волн Рэлея [5]

$$(2 - a^2 c_2^{-2})^2 - 4\sqrt{(1 - a^2 c_1^{-2})(1 - a^2 c_2^{-2})} + v^2 a^4 c^{-2} c_2^{-4} \cdot \sqrt{1 - a^2 c_1^{-2}} = 0.$$

В предельном случае, когда длина волны велика по сравнению с толщиной пластинки, заменяя в уравнении (1.10) гиперболические тангенсы их аргументами (при конечном значении a) и учитывая, что $a^2 c^{-2} \le 1$ для фазовой скорости симметричных колебаний, получим [5]

$$a^2 = \left(\frac{1-2v}{1-v}\right) v^2 + \frac{4c_t^2}{c_1^2}(c_1^2 - c_t^2). \tag{1.12}$$

Разлагая в уравнении (1.11) гиперболические тангенсы в ряд и сохраняя при этом три члена ряда ($a \prec c_t$), после некоторых преобразований для фазовой скорости антисимметричных колебаний будем иметь

$$a^2 = \frac{4}{3} c_t^2 (kh)^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{c_1^2} + \frac{v^2}{4c_t^2}\left(\frac{1-2v}{1-v}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2 kh}\right). \tag{1.13}$$

Уравнение (1.13) определяет значение фазовой скорости волн изгиба. Заметим, что в этом случае мы имеем дело с дисперсией волны. В общем случае фазовую скорость a требуется определить из уравнений (1.10) и (1.11), откуда следует, что имеет место дисперсия.

2. Рассмотрим эту же задачу на основе следующих предположений [4]: а) гипотеза Кирхгофа, согласно которой принимается, что

$$u_1 = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_3 = w(x,t); \tag{2.1}$$

б) гипотеза Кирхгофа в предположении, что деформация $\varepsilon_{33} \neq 0$ $\left(\varepsilon_{33} = -\dfrac{v}{1-v}\varepsilon_{11}\right)$.

Осредняя по толщине пластины уравнения движения в напряжениях так, как это делается в теории пластин [1, 4], получим уравнения движения тонкой пластинки в перемещениях срединной плоскости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v^2}{2Eh}\int_{-h}^{h} \rho k_1 dz = \frac{\rho(1-v^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2.2}$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{H}{4\pi}(h_2^+ - h_2^-) = \int_{-h}^{h} \rho k_3 dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{h} z\rho k_1 dz. \tag{2.3}$$

Здесь $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-v^2)}$, $h_2^\pm$ — значения компонент индуцированного магнитного поля на плоскостях $z = \pm h$,

$$\rho k_1 = \frac{\mu_0 H^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}), \;\; \rho k_3 = \frac{\mu_0 H^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}).$$

Представляя решение уравнений (2.2) и (2.3) в виде $q_0 \cdot \exp ik(x - at)$ ($q_0 = \mathrm{const}$) и учитывая решение уравнений электродинамики для внешней области (1.5), граничные условия (1.6) и соотношения (2.1) для определения фазовых скоростей продольных и поперечных колебаний, будем иметь:

$$a^2 = \gamma v^2 + \frac{4c_t^2}{c_l^2}(c_l^2 - c_t^2), \tag{2.4}$$

$$a^2 = \frac{4}{3}c_t^2(kh)^2\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2} + \gamma\frac{v^2}{4c_t^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2 kh}\right), \tag{2.5}$$

где $\gamma = \begin{cases} 1, & \text{случай а);} \\ \dfrac{1-2v}{1-v}, & \text{случай б).} \end{cases}$

Приведем сравнения выражений фазовых скоростей, полученных на основе точного решения и на основе гипотезы Кирхгофа. Сравнивая формулы (1.12) и (2.4), (1.13) и (2.5), замечаем, что скорость Альфвена, выражающая влияние внешнего магнитного поля ($v^2 \prec\prec c_t^2$), входит с разными множителями. Фазовые скорости симметричных колебаний идеально-проводящей пластинки в продольном магнитном поле, полученные на основе точного решения и на основе гипотезы Кирхгофа с учетом, что деформация $\varepsilon_{33} \neq 0$, совпадают. Для антисимметричных колебаний получаем, что при отсутствии магнитного поля значения фазовых скоростей, выведенные на основе точного решения и на основе гипотезы Кирхгофа (случаи а) и б)), тоже совпадают. При наличии же магнитного поля скорость Альфвена входит с разными множителями: точное решение – $\left(\dfrac{1-2v}{1-v}\right)^2$, при наличии гипотезы Кирхгофа (случай б)) – $\left(\dfrac{1-2v}{1-v}\right)$. Из формул (1.13) и (2.5) получаем зависимость относительной погрешности фазовых скоростей от магнитного поля и коэффициента Пуассона: $f(\beta, v) = \dfrac{2\beta v(1-2v)}{1-v+2\beta(1-2v)^2}$, $\beta = \dfrac{v^2}{4c_t^2}$. Для слоя из несжимаемого материала фазовые скорости совпадают. Если $v = \dfrac{1}{4}$, то получаем, что относительная погрешность зависит от магнитного поля следующим образом: $\dfrac{\beta}{3+2\beta}$.

Отметим также, что если в выражениях фазовых скоростей принять $H = 0$, то получим фазовые скорости симметричных и антисимметричных форм колебаний упругого слоя [1]. В [6] на основе точного пространственного подхода изучены колебания пластинки в продольном магнитном поле, а в [7] уточняются результаты, полученные в [6] и показывается применимость гипотезы Кирхгофа. Таким образом, гипотеза Кирхгофа приемлема при исследовании задач распространения магнитоупругих волн в проводящей пластинке.

Ереванский государственный университет

Академик С. А. Амбарцумян, С. В. Саркисян

О применимости гипотезы Кирхгофа при исследовании задач распространения магнитоупругих волн в пластинке

Исследуется вопрос применимости гипотезы Кирхгофа при рассмотрении задач

распространения магнитоупругих волн в пластинках.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Համբարձումյան, Ս. Վ. Սարգսյան

Սալում մագնիսաառաձգական ալիքների փարածման խնդիրներում Կիրխհոֆի վարկածի կիրառելիությունը

Հետազոտված է Կիրխհոֆի վարկածի կիրառելիությունը սալում մագնիսաառաձգական ալիքների փարածման խնդիրները դիտարկելիս:

Academician S. A. Ambartsumian, S. V. Sarkisyan

On the Application of Kirchhoff's Hypothesis at the Consideration of Problems for Magneto-Elastic Waves Propagation in the Plates

The issue of Kirchhoff's hypothesis application is investigated at the consideration of problems for magneto-elastic waves propagation in the plates.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М. Мир, 1975, 872 с.
2. *Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
3. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Колебания и устойчивость токонесущих пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1992. 124 с.
4. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М. Наука. 1987. 360 с.
5. *Саркисян С.В.* - Труды 14-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Кутаиси. 1987. Т. 2. С. 400 - 405.
6. *Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В., Кукуджанов В.Н.* - МТТ. 2007. N5. С. 146-157.
7. *Варданян А.В.* - ДНАН РА. 2009. N2. Т. 109. С. 145-153.