ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. М. Джрбашян

Биортогональные системы функций в пространствах A^2_ω в полуплоскости

(Представлено академиком В.С. Захаряном 24/II 2010)

Ключевые слова: *биортогональные системы, полнота, базис, интерполяция*

1. Наиболее общие банаховы пространства $A^p_{\omega,\gamma}$ $(1 \le p < +\infty, -\infty < \gamma \le 2)$ введены в работе [1] как множества тех голоморфных в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функций $f(z)$, которые при достаточно малых $\rho > 0$ удовлетворяют неванлинновскому условию

$$\liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_\beta^{\pi-\beta} \log^+ |f(Re^{i\vartheta})| \left(\sin\frac{\pi(\vartheta-\beta)}{\pi-2\beta}\right)^{1-\pi/\kappa} d\vartheta = 0, \tag{1}$$

где $\beta = \arcsin \rho/R = \pi/2 - \kappa$ и, одновременно,

$$\|f\|^p_{p,\omega,\gamma} = \iint_{G^+} |f(z)|^p \frac{d\mu_\omega(z)}{(1+|z|)^\gamma} < +\infty, \tag{2}$$

где $d\mu_\omega(x+iy) = dx d\omega(2y)$, а $\omega(t) \in \Omega_\alpha$ $(-1 \le \alpha < +\infty)$, т.е. функция $\omega(t)$ задана на $[0,+\infty)$ и такова, что

(i) $\omega(t) \nearrow$ (не убывает) в $(0,+\infty)$, $\omega(0) = \omega(+0)$ и существует последовательность $\delta_k \downarrow 0$ такая, что $\omega(\delta_k) \downarrow$ (строго убывает);

(ii) $\omega(t) \asymp t^{1+\alpha}$ при $\Delta_0 \le t < +\infty$ и некотором $\Delta_0 \ge 0$.

Здесь $f(t) \asymp g(t)$ означает, что $m_1 f(t) \le g(t) \le m_2 f(t)$, где $m_{1,2} > 0$ — постоянные.

Замечание 1. $A^p_{\omega,\gamma} = (i+z)^{\gamma/p} A^p_{\omega,0}$.

Замечание 2. При $\omega(t) = t^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$, $\gamma = 0$ и $p \geq 1$ пространство $A^p_{\omega,\gamma}$ совпадает с хорошо известным пространством A^p_α в полуплоскости (см. [2-4]). В таком случае (1) следует из (2), и это верно также, когда $\omega(t)$ непрерывно дифференцируема в $(0, +\infty)$ и такова, что $\omega'(t) \geq Mt^\alpha$ $(\alpha > -1)$ для почти всех $t > 0$, где $M > 0$ — постоянная. Однако в общем случае (1) не следует из (2), даже когда $\gamma = 0$.

Ниже мы будем рассматривать пространства $A^2_{\omega,\gamma}$ с $\gamma = 0$, которые будем кратко обозначать A^2_ω. Эти пространства — гильбертовы, и норма в них порождается скалярным произведением

$$(f, g)_\omega = \iint_{G^+} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu_\omega(z).$$

Результаты данной статьи получены с применением следующей теоремы, объединяющей утверждения леммы 5.1 и теоремы 5.3 работы [5], которая продолжает исследование, начатое в [1].

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{\omega}(t) \in \Omega_\alpha$ $(-1 \leq \alpha < +\infty)$, $\widetilde{\omega}(0) = 0$, *и пусть* $\omega(x)$ — *квадрат Волтерра функции* $\widetilde{\omega}(x)$, *т.е.*

$$\omega(x) = \int_0^x \widetilde{\omega}(x - t)d\widetilde{\omega}(t), \quad 0 < x < +\infty, \quad \omega(0) = 0.$$

Тогда $\omega(x) \in \Omega_{1+2\alpha}$ *и*

$$\big[I_{\tilde{\omega}}(x)\big]^2 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-xt} d\widetilde{\omega}(t)\right]^2 = \int_0^{+\infty} e^{-xt} d\omega(t) = I_\omega(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Кроме того, A^2_ω *совпадает со множеством функций, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) C_{\tilde{\omega}}(z - t)dt, \quad z \in G^+, \quad \varphi \in L^2(-\infty, +\infty), \tag{3}$$

где $C_{\tilde{\omega}}(z)$ — *ядро М. М. Джрбашяна для полуплоскости:*

$$C_{\tilde{\omega}}(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt} \frac{dt}{I_{\tilde{\omega}}(t)}, \quad z \in G^+.$$

Для любого $f(z) \in A^2_\omega$ *функция* $L_{\tilde{\omega}} f(z) = \varphi_0(z)$ — *единственная из* H^2, *с граничными значениями которой верно* (3). *При этом* $\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{A^2_{\omega,0}}$ *и* $\varphi - \varphi_0 \perp H^2$ *для любой функции* $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty)$, *с которой* (3) *справедливо. Оператор*

$$L_{\tilde{\omega}} f(z) = \int_0^{+\infty} f(z + i\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma), \quad z \in G^+,$$

изометрично отображает $A^2_\omega \longrightarrow H^2$, *а интеграл* (3) *задает обратную изометрию* $L^{-1}_{\tilde{\omega}} : H^2 \longrightarrow A^2_\omega$.

2. Изометрия между пространством Харди H^2 и пространствами A^2_ω в верхней полуплоскости G^+, данная в явном виде интегрального оператора в теореме 1, позволяет перенести любой известный в H^2 результат аддитивного характера в подобный же результат в пространствах A^2_ω. В частности, при $p = 2$ результаты М. М. Джрбашяна [6-8], относящиеся к *биортогональным системам функций и интерполяции в* H^p $(1 < p < +\infty)$, могут быть переведены в такие же результаты в пространствах A^2_ω, которые приведены в нижеследующих утверждениях.

Рассмотрим сравнительно простой случай узлов кратности 1, т.е. всюду ниже будем полагать, что $\{z_k\}_1^\infty$ является последовательностью *попарно различных* чисел из G^+. Говорят, что $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ равномерно разделена, т.е.

$$\inf_{k\geq 1} \prod_{j=1,\ j\neq k} \left| \frac{z_j - z_k}{z_j - \overline{z_k}} \right| = \delta > 0. \tag{4}$$

Введем в рассмотрение произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z - \overline{z_k}} \frac{|1 + z_k^2|}{1 + z_k^2},$$

которое сходится и представляет функцию, голоморфную всюду в конечной комплексной плоскости, кроме замыкания множества $\{\overline{z_k}\}_1^\infty$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\ z_k}{1 + |z_k|^2} < +\infty. \tag{5}$$

Отметим, что (5) следует из (4).

Всюду ниже будем полагать, что функции $\omega(x)$ и $\widetilde{\omega}(x)$ таковы, как в теореме 1. Тогда неравенство (3.21) работы [7] преобразуется к следующему виду.

Предложение 1. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то для любой функции* $f(z) \in A^2_\omega$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\ z_k \big| L_{\widetilde{\omega}} f(z_k) \big|^2 \leq C \|f\|^2_{2,\omega}\ ,$$

где $C > 0$ *— постоянная, не зависящая от* $f(z)$.

Прежде чем привести ряд утверждений об аппроксимации и интерполяции в A^2_ω, отметим, что функции

$$r_k(z) = \frac{1}{z - \overline{z_k}} \qquad \Omega_k(z) = \frac{B(z)}{z - z_k}, \quad k = 1, 2, \dots\ ,$$

принадлежат H^2 в G^+. Тем самым, все функции

$$L_{\tilde{\omega}}^{-1} r_k(z) = r_{k,\tilde{\omega}}(z) \quad \text{и} \quad L_{\tilde{\omega}}^{-1} \Omega_k(z) = \Omega_{k,\tilde{\omega}}(z), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

принадлежат A^2_ω, и можно проверить, что

$$r_{k,\tilde{\omega}}(z) = C_{\tilde{\omega}}(z - \overline{z_k}).$$

Теорема Г и некоторые другие результаты из [6] преобразуются в

Предложение 2. *Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ не удовлетворяет условию Бляшке, т.е. ряд* (5) *расходится, то обе системы*

$$\bigl\{C_{\tilde{\omega}}(z - \overline{z_k})\bigr\}_1^\infty \quad \text{и} \quad \bigl\{\Omega_{k,\tilde{\omega}}(z)\bigr\}_1^\infty$$

полны в A^2_ω.

Некоторые изменения в условиях (1.16) и (1.17) в [6] (или (2.2) и (2.3) в [7]) ведут к введению подмножества $A^2_\omega\{z_k\}$ функций из $f(z) \in A^2_\omega$, для которых существуют $g(z) \in H^2$ такие, что граничные значения функции $g(-z)B(z)$ при подходе из $G^- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ совпадают с граничными значениями $L_{\tilde{\omega}} f(z)$ $(\in H^2)$ почти для всех $-\infty < x < +\infty$. Ясно, что $A^2_\omega\{z_k\}$ может быть рассмотрено лишь при выполнении условия (5).

Ввиду теоремы 2 работы [8] справедливо

Предложение 3. *Системы $\{C_{\tilde{\omega}}(z - \overline{z_k}),\ \Omega_{k,\tilde{\omega}}(z)\}_1^\infty$ биортогональны в A^2_ω, т.е.*

$$\bigl(C_{\tilde{\omega}}(z - \overline{z_k}), \Omega_{\nu,\tilde{\omega}}(z)\bigr)_\omega = \iint_{G^+} C_{\tilde{\omega}}(z - \overline{z_k})\, \overline{\Omega_{\nu,\tilde{\omega}}(z)} d\mu_\omega(z) = \begin{cases} 1 & \textit{если} \quad \nu = k, \\ 0 & \textit{если} \quad \nu \neq k. \end{cases}$$

Ввиду лемм Б и 1.1 из [6] имеет место

Предложение 4. *Пусть $f(z) \in A^2_\omega$ — любая функция. Тогда:*

1°. *$f(z)$ принадлежит $A^2_\omega\{z_k\}$ в том и только том случае, когда*

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L_{\tilde{\omega}} f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t - z} \equiv 0, \quad z \in G^+,$$

где $L_{\tilde{\omega}} f(t)$ и $B(t)$ граничные значения функций из H^2;

2°. *имеет место ортогональное разложение*

$$f(z) = F(z) + R(z), \quad z \in G^+, \quad \|f\|^2_{2,\omega} = \|F\|^2_{2,\omega} + \|R\|^2_{2,\omega},$$

где $F(z) \in A^2_\omega\{z_k\}$ и $R(z) = L_{\tilde{\omega}}^{-1}\bigl[B(z)\Psi(z)\bigr] \in A^2_\omega$.

В силу теорем 4.1 и 5.2 из [7] справедливо

Предложение 5. *Каждая из систем* $\left\{C_{\tilde\omega}(z-\overline{z_k})\right\}_1^\infty$ *и* $\left\{\Omega_{k,\tilde\omega}(z)\right\}_1^\infty$ *является базисом в* $A^2_\omega\{z_k\}$ *тогда и только тогда, когда* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.

В силу формул (4.29), (4.31) и формулы разложения в конце доказательства теоремы 5.2 в [7] имеет место

Предложение 6. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то любая функция* $f(z) \in A^2_\omega\{z_k\}$ *представима в* G^+ *обоими рядами*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k(f)\,C_{\tilde\omega}(z-\overline{z_k})=\sum_{k=1}^\infty L_{\tilde\omega}f(z_k)\ \Omega_{k,\tilde\omega}(z),\quad c_k(f)=i(f,\Omega_{k,\tilde\omega})_\omega,$$

которые сходятся в A^2_ω *и, следовательно, равномерно внутри* G^+.

Ввиду теоремы 4.2 работы [7] верно

Предложение 7. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$, *то любая функция* $f(z)\in A^2_\omega$ *представима в виде суммы*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k(f)\,C_{\tilde\omega}(z-\overline{z_k})+\varphi(z),$$

где ряд сходится в A^2_ω, *равномерно внутри* G^+, *а*

$$\varphi(z)=L_{\tilde\omega}^{-1}\big[B(z)\Psi(z)\big]\in A^2_\omega,\quad \Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{L_{\tilde\omega}f(t)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}\in H^2.$$

Ввиду теорем 5.1 и 5.2 из [7] имеет место

Предложение 8. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ *— последовательность попарно различных точек в* G^+. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$ *и* $\{w_k\}_1^\infty$ *— последовательность чисел, удовлетворяющая условию*

$$A=\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im} z_k|w_k|^2<+\infty,$$

то существует единственная функция $f_0(z)\in A^2_\omega\{z_k\}$ *такая, что*

$$L_{\tilde\omega}f_0(z_k)=w_k,\quad k=1,2,\dots,\quad \text{and}\quad \|f_0\|_{A^2_\omega}\le C_\delta A,$$

где $C_\delta>0$ *— постоянная, зависящая лишь от* δ *из* (4). *Эта функция разлагается в ряд*

$$f_0(z)=\sum_{k=1}^\infty w_k\Omega_{k,\tilde\omega}(z),\quad z\in G^+,$$

который сходится в A^2_ω *и равномерно внутри* G^+.

2°. *Обратно, если множество всех последовательностей* $\left\{(\mathrm{Im}\, z_k)^{1/2} f(z_k)\right\}_1^\infty$, *где* $f(z) \in A^2_\omega$, *совпадает с пространством* l^2 *последовательностей комплексных чисел, модули которых суммируемы с квадратом, то* $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta$.

Институт математики НАН РА
E-mail: armen_jerbashian@yahoo.com

А. М. Джрбашян

Биортогональные системы функций в пространствах A^2_ω в полуплоскости

С применением найденного ранее в явном виде интегрального оператора изометрии между пространством Харди H^2 и пространствами A^2_ω в верхней полуплоскости G^+ результаты М. М. Джрбашяна о биортогональных системах фунцкций и интерполяции в H^2 переведены в подобные же утверждения в A^2_ω.

Ա. Մ. Ջրբաշյան

Ֆունկցիաների բիօրթոգոնալ համակարգեր կիսահարթության A^2_ω պարածություններում

G^+ վերին կիսահարթության մեջ Հարդիի H^2 եւ կշռային A^2_ω պարածությունների միջեւ գործող, ինտեգրալ օպերատորի բացահայտ տեսք ունեցող իզոմետրիայի միջոցով H^2-ում ֆունկցիաների բիօրթոգոնալ համակարգերին ու ինտերպոլյացիային վերաբերող Մ. Մ. Ջըրբաշյանի արդյունքները փոխակերպված են նմանատիպ արդյունքների A^2_ω պարածություններում:

A. M. Jerbashian

Biorthogonal Systems of Functions in A^2_ω Spaces over the Half-Plane

An isometry between the Hardy space H^2 and the spaces A^2_ω over the upper half-plane G^+, which has an explicit form of integral operator is used to convert M. M. Djrbashian's results on biorthogonal systems of rational functions and interpolation in H^2 into similar statements in A^2_ω.

Литература

1. *Jerbashian A. M.* In: Operator Theory: Advances and Applications. Birkhauser Verlag Basel/Switzerland. 2005. V. 158. P. 141-158.

2. *Coifman R. R., Rochberg R.* Asterisque. 1980. V. 77. P. 12-67.

3. *Ricci F., Taibleson M.* Annali Scuola Normale Superiore. Pisa, Classe di Scienze, Ser. 4. 1983. V. 10. N 1. P. 1-54.

4. *Джрбашян М. М., Джрбашян А. Э.* - ДАН СССР. 1985. Т. 285. N 3. С. 547-550.

5. *Jerbashian A. M., Jerbashian V. A.* - CMFT: Computational Methods and Function Theory. 2007. V. 7. N 2. P. 205-238.

6. *Джрбашян М. М.* - Мат. сборник. 1981. Т. 114(156). N 1. С. 1-70.

7. *Джрбашян М. М.* - Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42. N 6. С. 1322-1384.

8. *Джрбашян М. М.* - Мат. сборник. 1974. Т. 95(137). N 3(11). С. 418-444.