ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

ФИЗИКА

УДК 539.1

Академик Д. М. Седракян, Л. Р. Седракян

О волновых функциях при двухканальном рассеянии

(Представлено 8/II 2010)

Ключевые слова: *двухканальное рассеяние, волновая функция*

1. Введение. В [1] рассмотрено рассеяние частицы на потенциале: $V(x,y)=V(x)V(y)$, где

$$V(x)=\begin{cases} K & a\le x\le b \\ 0 & a\ge x\ge b \end{cases},$$

а $V(y)$ – произвольная функция от y, которая удовлетворяет условию $V(0)=V(c)=\infty$. Получены амплитуды прохождения T_1,T_2 и отражения R_1,R_2 по двум каналам рассеяния соответственно. Ниже мы предполагаем, что эти амплитуды заданы. Как показано в [2,3], для нахождения волновой функции частицы $\Psi(x,y)$, которая является решением уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)+\left(\chi^2-V(x,y)\right)\Psi(x,y)=0, \quad (1)$$

где

$$\frac{2M}{\hbar^2}E=\chi^2, \qquad \frac{2M}{\hbar^2}U(x,y)=V(x,y),$$

ее ищут в виде

$$\Psi(x.y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\Phi_n(y), \quad (2\text{ a})$$

где

$$\Phi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}y,\qquad n=1,2.... \tag{2 б}$$

В случае двухканального рассеяния n принимает два значения: $n=1$ и $n=2$, тогда волновая функция (2 а) принимает вид

$$\Psi(x,y)=\Psi_1(x)\Phi_1(y)+\Psi_2(x)\Phi_2(y). \tag{3}$$

Как уже было отмечено, функции $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$ определены формулами (2 б), а искомые функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2}+q_1^2\Psi_1(x)-V_{12}\Psi_2(x)=0,\\&\frac{d^2\Psi_2(x)}{dx^2}+q_2^2\Psi_2(x)-V_{12}\Psi_1(x)=0,\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}q_1^2=k_1^2-V_{11},\quad q_2^2=k_2^2-V_{22},\\ k_1^2=\chi^2-\chi_1^2,\ k_2^2=\chi^2-\chi_2^2,\ \chi_m=\frac{\pi}{a}m\quad m=1,2,\\ V_{mn}(x)=\int_0^c\Phi_m(y)V(x,y)\Phi_n(y)dy\quad m=1,2.\end{gathered} \tag{5}$$

Определение волновой функции $\Psi(x,y)$ важно для рассмотрения задачи взаимодействия электрона, движущегося при заданном потенциале, с электромагнитной волной. Взаимодействие электрона с электромагнитной волной, при наличии двух каналов рассеяния, может привести к когерентному усилению или поглощению волны, когда энергия фотона $\hbar\omega$ близка к энергии $\Delta E=\frac{\hbar^2\left(\chi_2^2-\chi_1^2\right)}{2M}$. Для исследования этих проблем сначала нужно определить нормированную волновую функцию $\Psi(x,y)$ во всем интервале взаимодействия.

Цель данной статьи − определить эту функцию. В ¢ 2 определен вид этой функции в интервалах $-\infty<x<a,\ a\le x\le b$ и $b<x<\infty$. В ¢ 3 для определения волновых функций производится сшивка волновых функций в точках $x=a$ и $x=b$. В конце этого параграфа производится нормировка функции $\Psi(x,y)$ и находится ее окончательное выражение.

2. Волновая функция $\Psi(x,y)$ в разных интервалах по x. Как уже было отмечено, волновая функция $\Psi(x,y)$ имеет вид (3). Входящие в них функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в интервале $-\infty < x < a$ должны иметь вид:

$$\begin{aligned} &\Psi_1^{(1)}(x) = e^{ik_1x} + R_1e^{-ik_1x}, \\ &\Psi_2^{(1)}(x) = R_2e^{-ik_2x}, \end{aligned} \tag{6}$$

Вид этих функций в интервале $b < x < \infty$ также можно записать сразу:

$$\Psi_1^{(3)}(x) = T_1e^{ik_1x}, \quad \Psi_2^{(3)}(x) = T_2e^{ik_2x}. \tag{7}$$

Входящие в решения (6) и (7) коэффициенты R_1, R_2 и T_1, T_2 являются амплитудами отражения и прохождения и найдены в работе [1].

Для нахождения функций $\Psi_1^{(2)}(x)$ и $\Psi_2^{(2)}(x)$ в интервале $a \le x \le b$ мы должны решить систему уравнений (4). Эти уравнения являются системой линейных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому их решения можно искать в виде

$$\Psi_1^{(2)}(x) = \sum_i A_{1i}e^{ip_ix} \text{ и } \Psi_2^{(2)}(x) = \sum_i A_{2i}e^{ip_ix}, \tag{8}$$

где A_{1i}, A_{2i} и p_i определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} &\left(-p^2 + q_1^2\right)A_{1i} - V_{12}A_{2i} = 0, \\ &-V_{12}A_{1i} + \left(-p^2 + q_2^2\right)A_{2i} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Чтобы эта система уравнений имела отличное от нуля решение, необходимо выполнение условия

$$\left(p^2 - q_1^2\right)\left(p^2 - q_2^2\right) - V_{12} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) определяет корни p_i, которые входят в решение (8). При выполнении условия (10) из системы уравнений (9) остается одно уравнение, которое и связывает коэффициенты A_{2i} с соответствующими коэффициентами A_{1i}. Эта связь имеет вид

$$A_{2i} = \frac{q_1^2 - p_i^2}{V_{12}}A_{1i}. \tag{11}$$

Уравнение (10) имеет четыре решения $\pm p_1$ и $\pm p_2$, где

$$\begin{aligned} &p_1^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} + \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}\delta = \frac{q_1^2}{2}(1+\delta) + \frac{q_2^2}{2}(1-\delta), \\ &p_2^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2} - \frac{q_1^2 - q_2^2}{2}\delta = \frac{q_1^2}{2}(1-\delta) + \frac{q_2^2}{2}(1+\delta), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\delta = \sqrt{1 + \left(\frac{2V_{12}}{q_1^2 - q_2^2} \right)^2}. \qquad (13)$$

Таким образом, искомую функцию $\Psi_1^{(2)}(x)$ можно представить в следующем виде:

$$\Psi_1^{(2)}(x) = Ae^{ip_1(x-a)} + Be^{ip_2(x-a)} + Ce^{-ip_1(x-a)} + De^{-ip_2(x-a)}, \qquad (14)$$

где введены обозначения $A_{11} = A,\ A_{12} = B,\ A_{13} = C$ и $A_{14} = D$. Используя уравнения (11), искомую функцию $\Psi_2^{(2)}(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\Psi_2^{(2)}(x) = \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} \left(Ae^{ip_1(x-a)} + Ce^{-ip_1(x-a)} \right) + \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}} \left(Be^{ip_2(x-a)} + De^{-ip_2(x-a)} \right). \qquad (15)$$

Итак, формулы (6), (7), (14) и (15) определяют искомые функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в разных интервалах определения по x. Фактически мы нашли вид волновой функции $\Psi(x, y)$ в этих трех интервалах по x с точностью пока неизвестных постоянных A, B, C и D. Эти постоянные определяются из непрерывности функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$. Отметим, что непрерывность производных этих функций по x в точках $x = a$ и $x = b$ выполняется автоматически, так как в интервалах $-\infty < x < a$ и $b < x < \infty$ мы выбрали эти функции в виде (6) и (7) соответственно [4,5].

3. Нахождение искомых постоянных $\boldsymbol{A, B, C, D}$. Требование непрерывности функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ в точках $x = a$ и $x = b$ приведет к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
(A + C) + (B + D) = e^{ik_1 a} + R_1 e^{-ik_1 a}, \\
\frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} (A + C) + \frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} (B + D) = R_2 e^{-ik_2 a}, \\
\left(Ae^{ip_1 d} + Ce^{-ip_1 d} \right) + \left(Be^{ip_2 d} + De^{-ip_2 d} \right) = T_1 e^{ik_1 b}, \\
\frac{q_1^2 - p_1^2}{V_{12}} \left(Ae^{ip_1 d} + Ce^{-ip_1 d} \right) + \frac{q_1^2 - p_2^2}{V_{12}} \left(Be^{ip_2 d} + De^{-ip_2 d} \right) = T_2 e^{ik_2 b}.
\end{gathered} \qquad (16)$$

Это система линейных уравнений для A, B, C и D, и ее решение простое. Расчет сводится к определению разных детерминантов четвертого порядка. A, B, C

и D являются разными отношениями этих детерминантов. Расчет довольно громоздкий, поэтому сразу напишем полученные результаты:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{i\left[\theta_2 e^{ik_1a-ip_1d} + \theta_2 R_1 e^{-ik_1a-ip_1d} - R_2 e^{-ik_2a-ip_1d} + T_1\theta_2 e^{ik_1b} + T_2 e^{ik_2b}\right]}{2\left(\theta_2-\theta_1\right)\sin p_1d},\\
C &= \frac{i\left[R_2 e^{-ik_2a+ip_1d} - \theta_2 e^{ik_2a+ip_2d} - \theta_2 R_1 e^{-ik_1a+ip_1d} + T_1\theta_2 e^{ik_1b} - T_2 e^{ik_2b}\right]}{2\left(\theta_2-\theta_1\right)\sin p_1d},\\
B &= \frac{i\left[R_2 e^{-ik_2a-ip_2d} - \theta_1 e^{ik_1a-ip_2d} - \theta_1 R_1 e^{-ik_1a-ip_2d} + \theta_1 T_1 e^{ik_1b} - T_2 e^{ik_2b}\right]}{2\left(\theta_2-\theta_1\right)\sin p_2d},\\
D &= \frac{i\left[\theta_1 e^{ik_1a+ip_2d} + \theta_1 R_1 e^{-ik_1a+ip_2d} - R_2 e^{-ik_2a+ip_2d} - \theta_1 T_1 e^{ik_1b} + T_2 e^{ik_2b}\right]}{2\left(\theta_2-\theta_1\right)\sin p_2d},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где

$$\theta_1 = \frac{q_1^2-p_1^2}{V_{12}}, \quad \theta_2 = \frac{q_1^2-p_2^2}{V_{12}}.$$

Подставив выражения постоянных A, B, C и D в формулы (14) и (15), для искомых функций $\Psi_1^{(2)}\left(x\right)$ и $\Psi_2^{(2)}\left(x\right)$ получим следующие виражения:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1^{(2)}\left(x\right) = &-\frac{\theta_2 e^{ik_1a} + \theta_2 R_1 e^{-ik_1a} - R_2 e^{-ik_2a}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_1\left(x-a-d\right)}{\sin p_1d} +\\
&+\frac{\theta_1 e^{ik_1a} + \theta_1 R_1 e^{-ik_1a} - R_2 e^{-ik_2a}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_2\left(x-a-d\right)}{\sin p_1d} -\\
&-\frac{T_2 e^{ik_2b} - \theta_2 T_1 e^{ik_1b}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_1\left(x-a\right)}{\sin p_1d} + \frac{T_2 e^{ik_2b} - \theta_1 T_1 e^{ik_1b}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_2\left(x-a\right)}{\sin p_2d},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_2^{(2)}\left(x\right) = &-\frac{\theta_2\theta_1 e^{ik_1a} + \theta_2\theta_1 e^{-ik_1a} - \theta_1 R_2 e^{-ik_2a}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_1\left(x-a-d\right)}{\sin p_1d} +\\
&+\frac{\theta_2\theta_1 e^{ik_1a} + \theta_2\theta_1 R_1 e^{-ik_2a} - \theta_2 R_2 e^{-ik_2a}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_2\left(x-a-d\right)}{\sin p_2d} -\\
&-\frac{\theta_1 T_2 e^{ik_2b} - \theta_1\theta_2 T_1 e^{ik_1b}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_1\left(x-a\right)}{\sin p_1d} + \frac{\theta_2 T_2 e^{ik_2b} - \theta_1\theta_2 T_1 e^{ik_1b}}{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin p_2\left(x-a\right)}{\sin p_2d}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Подставив выражение для $\Psi_1^{(2)}\left(x\right)$ и $\Psi_2^{(2)}\left(x\right)$ в формулу (3), определим волновую функцию $\Psi\left(x,y\right)$ в интервале $a \le x \le b$. Волновую функцию в интервалах $-\infty < x < a$ и $b < x < \infty$ найдем, если в формулу (3) подставим вместо $\Psi_1\left(x\right)$ и $\Psi_2\left(x\right)$ их выражения (6) и (7) соответственно. Найденная таким образом волновая функция

$\Psi(x,y)$ не нормирована. Легко видеть, что функцию $\Psi(x,y)$ можно умножить на произвольную постоянную M , и она снова останется решением системы уравнений (4).

Так как движение частицы по x не ограничено, то условие нормировки волновой функции должно иметь вид $\int\limits_0^a dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\Psi(x,y)\right|^2 dx = \infty$. Однако волновую функцию можно нормировать на единицу, если место нахождения частицы по направлению x ограничить величиной $2L$ и требовать, чтобы

$$\frac{1}{2L}\int\limits_0^a dy \int\limits_{-L}^{L} \left|\Psi(x,y)\right|^2 dx = 1. \tag{20}$$

где L может быть сколь угодно большим. Подставляя плотность вероятности

$$\left|\Psi\right|^2 = \left(\Psi_1^*(x)\Phi_1(y) + \Psi_2^*(x)\Phi_2(y)\right)\left(\Psi_1(x)\Phi_1(y) + \Psi_2(x)\Phi_2(y)\right) \tag{21}$$

в условие (3.5), можно написать

$$\frac{M^2}{2L}\left[\left(1+\left|R_1\right|^2+\left|R_2\right|^2\right)L\left(1+\frac{a}{L}\right)+\left(\left|T_1\right|^2+\left|T_2\right|^2\right)L\left(1-\frac{b}{L}\right)+F\right]=1,$$

где F – конечная величина. При стремлении L к бесконечности окончательно получим

$$M = \left(\frac{2}{1+\left|R_1\right|^2+\left|R_2\right|^2+\left|T_1\right|^2+\left|T_2\right|^2}\right)^{1/2}.$$

Итак, мы определили волновую функцию $\Psi(x,y)$ во всем интервале ее определения: $-\infty \le x \le \infty$ и $0 \le y \le a$.

Ереванский государственный университет

Академик Д. М. Седракян, Л. Р. Седракян

О волновых функциях при двухканальном рассеянии

Для случая двухканального рассеяния построены стационарные двумерные волновые функции рассеивающейся частицы. Волновые функции построены в трех интервалах по x: в областях отражения и прохождения, а также в области отличного от нуля внешнего потенциала. В конце проведена нормировка полной волновой функции $\Psi(x,y)$.

Academician D. M. Sedrakian, L. R. Sedrakian

Wave Functions in the Case of Two-Channel Scattering

Steady state two-dimensional wave functions are built in the case of two-channel scattering. Wave functions are built in three intervals by x: in the range of reflection and transmission, and also in the range of non-zero potential. Finally normalization of complete wave function $\Psi(x, y)$ is done.

Ակադեմիկոս Դ. Մ. Սեդրակյան, Լ. Ռ. Սեդրակյան

Ալիքային ֆունկցիաները երկուղի ցրման դեպքում

Ցրվող մասնիկի ստացիոնար երկչափ ալիքային ֆունկցիաները կառուցված են երկուղի ցրման դեպքում: Ալիքային ֆունկցիաները կառուցված են երեք տիրույթներում՝ անդրադարձման, անցման և զրոյից տարբեր արտաքին պոտենցիալի: Վերջում անց է կացվում լրիվ $\Psi(x, y)$ ալիքային ֆունկցիայի նորմավորումը:

Литература

1. *Седракян Д. М., Казарян Э. М., Седракян Л. Р.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2010. Т. 45. N 3. С. 173-182.

2. *Седракян Д. М., Казарян Э. М., Седракян Л. Р.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N 6. С. 395-404.

3. *Седракян Л.Р.* - ДНАН Армении. 2009. Т. 109. С. 214.

4. *Седракян Д. М., Хачатрян А. Ж., Казарян Э. М., Седракян Л. Р.* - Изв. НАН Армении. Физика. 2009. Т. 44. N 3. С. 167-175.

5. *Седракян Д. М., Хачатрян А. Ж.* - Изв. НАН Армении. Физика. 1999. Т. 34. С. 138-144.