ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.3

Академик Л. А. Агаловян, М. З. Саргсян

К решению трехмерной смешанной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения

(Представлено 26/I 2010)

Ключевые слова: *сингулярное возмущение, пограничный слой, вязкое трение, скорость затухания, средняя квадратичная погрешность*

1. Постановка задачи. Рассматриваются вынужденные колебания ортотропной пластины $D=\{(x,y,z),\ (x,y)\in D_0,\ |z|\le h,\ h<<l,\}$, с учетом вязкого трения при граничных условиях динамической задачи теории упругости:

$$\sigma_{zz}=\sigma_{zz}^{+}(\xi,\eta)\cos\Omega t,\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=h;\ \ w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=-h \qquad (1.1)$$

или

$$w=w^{+}(\xi,\eta)\cos\Omega t,\ \ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=h;\ \ w=0,\ \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ при } z=-h. \qquad (1.2)$$

Если в уравнениях и соотношениях пространственной задачи теории упругости переходить к безразмерным координатам $\xi=x/l,\eta=y/l,\zeta=z/h$ и компонентам вектора перемещения $U=u/l$, $V=v/l$, $W=w/l$, получим сингулярно возмущенную геометрическим малым параметром $\varepsilon=h/l$ систему, где h – полутолщина, l – характерный тангенциальный размер пластины. Решение этой системы (I) складывается из решений внутренней задачи $\left(I^{\mathrm{int}}\right)$ и пограничного слоя (I_b) [1].

2. Решение внутренней задачи. Решение внутренней задачи отыщем в виде [2]

$$I^{\mathrm{int}}(\xi,\eta,\zeta,t)=\varepsilon^{q_i+s}\left[I_1^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\sin\Omega t+I_2^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\cos\Omega t\right], \qquad (2.1)$$

где $q_i = -1$ для напряжений, $q_i = 0$ для перемещений [3]. Подставив (2.1) в преобразованные уравнения трехмерной задачи, получим систему относительно $I_j^{(s)}, j = 1,2$. Решив эту систему и удовлетворив граничным условиям (1.1),(1.2), определим окончательные выражения для I^{int}. В частности, когда $\sigma_{zz}^{+}(\xi,\eta) = const$, при условиях (1.1) имеем

$$\sigma_{xx} = -\frac{A_{23}\sigma_{zz}^{+}}{A_{11}\left(\cos 4\delta_W + ch4\gamma_W\right)}\left[(\sin\delta_W\left(1-\zeta\right)sh\gamma_W\left(3+\zeta\right)+\sin\delta_W(3+\zeta)\,sh\gamma_W\left(1-\zeta\right))\sin\Omega t + \right. \tag{2.2}$$

$$\left.(\cos\delta_W(1-\zeta)ch\gamma_W\left(3+\zeta\right)+\cos\delta_W\left(3+\zeta\right)ch\gamma_W\left(1-\zeta\right))\cos\Omega t\right], \qquad \left(x,y,z;-A_{23},-A_{13},A_{11}\right)$$

где

$$\gamma_W = \sqrt{\frac{\Omega_*}{2A_{11}}\left(\sqrt{\Omega_*^2+4K^2}-\Omega_*\right)}, \quad \delta_W = \sqrt{\frac{\Omega_*}{2A_{11}}\left(\sqrt{\Omega_*^2+4K^2}+\Omega_*\right)}, \quad \left(W,U,V;\frac{1}{A_{11}},a_{55},a_{44}\right).$$

Выражения величин внутренней задачи при произвольных значениях $\sigma_{zz}^{+}\left(\xi,\eta\right)$ содержатся в [4]. Отметим, что решение внутренней задачи полностью выражается через значения граничных функций (1.1),(1.2). Оно, как правило, не удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности. Для устранения возникшей неувязки строится решение для пограничного слоя [1].

3. Пограничный слой. Поскольку неоднородные граничные условия (1.1),(1.2) удовлетворены в решении внутренней задачи, решение для пограничного слоя должно удовлетворить условиям

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = h \text{ и } w = 0,\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = -h \tag{3.1}$$

или

$$w = 0,\ \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = \pm h. \tag{3.2}$$

Для определения решения пограничного слоя вводится новая замена переменной $\gamma = x/h$, и решение вновь полученной системы ищется в виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta jb} = \varepsilon^{-1+s}\sigma_{\alpha\beta jb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma), \qquad \alpha,\beta = x,y,z, \\ &U_{jb} = \varepsilon^{s}U_{jb}^{(s)}(\eta,\zeta)\exp(-\lambda\gamma), \ \ (U,V,W),\ j=1,2, \quad s=\overline{0,S} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в преобразованные уравнения, получим новую систему, откуда все компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xxjb}^{(s)} = -A_{23}\frac{\partial W_{jb}^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{22}\lambda U_{jb}^{(s)} + A_{12}R_{jV}^{(s)}, \qquad \sigma_{xyjb}^{(s)} = -\frac{1}{a_{66}}(\lambda V_{jb}^{(s)} - R_{jU}^{(s)}) \\ &\sigma_{yyjb}^{(s)} = -A_{13}\frac{\partial W_{jb}^{(s)}}{\partial\zeta} + A_{12}\lambda U_{jb}^{(s)} - A_{33}R_{jV}^{(s)}, \qquad \sigma_{xzjb}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}(\frac{\partial U_{jb}^{(s)}}{\partial\zeta} - \lambda W_{jb}^{(s)}) \\ &\sigma_{zzjb}^{(s)} = A_{11}\frac{\partial W_{jb}^{(s)}}{\partial\zeta} + A_{23}\lambda U_{jb}^{(s)} + A_{13}R_{jV}^{(s)}, \qquad \sigma_{yzjb}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}(\frac{\partial V_{jb}^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{jW}^{(s)}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$A_{11}=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\Delta},\ A_{22}=\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{\Delta},\ A_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{\Delta},\ A_{12}=\frac{a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}}{\Delta},\ A_{13}=\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{\Delta},$$

$$A_{23}=\frac{a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}}{\Delta},\ \Delta=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2,$$

Для компонент перемещения, введя обозначения $Z_{Ub}^{(s)}=U_{1b}^{(s)}+iU_{2b}^{(s)}$, $\overline{Z}_{Ub}^{(s)}=U_{1b}^{(s)}-iU_{2b}^{(s)}$, (U,V,W), получим три уравнения относительно функций $Z_{Ub}^{(s)},Z_{Vb}^{(s)},Z_{Wb}^{(s)}$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 Z_{Ub}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\left(A_{23}a_{55}-1\right)\lambda\frac{\partial Z_{Wb}^{(s)}}{\partial\zeta}+a_{55}\left(A_{22}\lambda^2+\Omega_*^2\right)Z_{Ub}^{(s)}-2Ka_{55}\Omega_* iZ_{Ub}^{(s)}=a_{55}Z_{\sigma_{xy}b}^{R(s)}+A_{12}a_{55}\lambda Z_{Vb}^{R(s)} \\
A_{11}\frac{\partial^2 Z_{Wb}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\lambda\left(A_{23}-\frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial Z_{Ub}^{(s)}}{\partial\zeta}+\left(\frac{\lambda^2}{a_{55}}+\Omega_*^2\right)Z_{jWb}^{(s)}-2K\Omega_* iZ_{Wb}^{(s)}=Z_{\sigma_{yz}b}^{R(s)}-A_{13}\frac{\partial Z_{Vb}^{R(s)}}{\partial\zeta} \\
\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 Z_{Vb}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{a_{66}}\lambda^2 Z_{Vb}^{(s)}+\Omega_*^2 Z_{Vb}^{(s)}-2K\Omega_* iZ_{Vb}^{(s)}=Z_{\sigma_{yy}b}^{R(s)}+\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial Z_{Wb}^{R(s)}}{\partial\zeta}+\lambda\frac{1}{a_{66}}Z_{Ub}^{R(s)}
\end{gathered}\tag{3.5}$$

При $s=0$ правые части уравнений (3.5) равняются нулю и имеем:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\left(A_{23}a_{55}-1\right)\lambda\frac{\partial Z_{Wb}^{(0)}}{\partial\zeta}+a_{55}\left(A_{22}\lambda^2+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_{Ub}^{(0)}=0 \\
A_{11}\frac{\partial^2 Z_{Wb}^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\lambda\left(A_{23}-\frac{1}{a_{55}}\right)\frac{\partial Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta}+\left(\frac{\lambda^2}{a_{55}}+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_{Wb}^{(0)}=0 \\
\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 Z_{Vb}^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\left(\frac{1}{a_{66}}\lambda^2+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)Z_{Vb}^{(0)}=0
\end{gathered}\tag{3.6}$$

В плоской задаче решение системы (3.6) относительно $Z_{Ub}^{(0)},Z_{Wb}^{(0)}$ будем искать в виде

$$Z_{Ub}^{(0)}=G_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta,\ Z_{Wb}^{(0)}=LG_b^{(0)}(\eta)\exp k\zeta\ ,\tag{3.7}$$

где L − не определенный пока множитель. В результате получим систему

$$\begin{gathered}
k^2+\left(A_{23}a_{55}-1\right)\lambda Lk+a_{55}\left(A_{22}\lambda^2+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)=0 \\
A_{11}k^2L+\lambda\left(A_{23}-\frac{1}{a_{55}}\right)k+\left(\frac{\lambda^2}{a_{55}}+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)L=0
\end{gathered}\tag{3.8}$$

из которой для множителя L будем иметь

$$L=\frac{k^2+a_{55}\left(A_{22}\lambda^2+\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)}{\left(1-A_{23}a_{55}\right)\lambda k},\tag{3.9}$$

а для k получим характеристическое уравнение

$$A_{11}k^4+\left(\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\right)k^2+A_{22}\lambda^4+\Phi_3\lambda^2+\Phi_4=0\,,\tag{3.10}$$

$$\Phi_1=a_{55}A_{11}A_{22}+2A_{23}-A_{23}^2a_{55},\qquad \Phi_2=\left(1+a_{55}A_{11}\right)\left(\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)$$

$$\Phi_3=\left(\Omega_*^2-i2K\Omega_*\right)\left(1+A_{22}a_{55}\right),\qquad \Phi_4=-4K^2a_{55}\Omega_*^2-i4Ka_{55}\Omega_*^3-a_{55}\Omega_*^4$$

Уравнение (3.10) имеет четыре корня:

$$k = \pm\sqrt{\frac{-\left(\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\right)\pm\sqrt{\left(\Phi_1\lambda^2+\Phi_2\right)^2-4A_{11}\left(A_{22}\lambda^4+\Phi_3\lambda^2+\Phi_4\right)}}{2A_{11}}}. \qquad (3.11)$$

Следовательно, каждому k_i будет соответствовать свой множитель L_i. Итак, согласно (3.7) будем иметь:

$$Z_{Ub}^{(0)} = \sum_{i=1}^{4} G_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta, \qquad Z_{Wb}^{(0)} = \sum_{i=1}^{4} LG_{ib}^{(0)}(\eta)\exp k_i\zeta \qquad (3.12)$$

Условиями для $Z_{Ub}^{(0)}, Z_{Wb}^{(0)}$, вытекающими из граничных условий (3.1) и (3.2), соответственно будут:

$$\begin{gathered}\frac{\partial Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda Z_{Wb}^{(0)} = 0,\ A_{11}\frac{\partial Z_{Wb}^{(0)}}{\partial\zeta} + A_{23}\lambda Z_{Ub}^{(0)} = 0, \quad \text{при} \quad \zeta = 1 \\ Z_{Wb}^{(0)} = 0,\ \frac{\partial Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda Z_{Wb}^{(0)} = 0, \quad \text{при} \quad \zeta = -1\end{gathered} \qquad (3.13)$$

$$Z_{Wb}^{(0)} = 0,\ \frac{\partial Z_{Ub}^{(0)}}{\partial\zeta} - \lambda Z_{Wb}^{(0)} = 0, \quad \text{при} \quad \zeta = \pm 1. \qquad (3.14)$$

Удовлетворив условиям (3.13) или (3.14), получим алгебраическую однородную систему относительно коэффициентов $G_{ib}^{(0)}(\eta)$, определитель которого должен равняться нулю. Из этого условия вытекает характеристическое уравнение относительно λ. Корень этого уравнения с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (обозначим через λ_p) характеризует скорость убывания искомых величин в плоском пограничном слое. Все коэффициенты вышеуказанной системы однородных уравнений будут выражаться через один, например, через $G_{1b}^{(0)}(\eta)$. Учитывая, что каждому корню λ_{pn} с $\operatorname{Re}\lambda_{pn} > 0$ соответствует сопряженный $\overline{\lambda_{pn}}$, и представив коэффициент $G_{1bn}^{(0)}(\eta)$ в виде

$$G_{1bn}^{(0)}(\eta) = \frac{1}{2}\left(A_{1n}^{(0)} - iA_{2n}^{(0)}\right), \qquad (3.15)$$

в окончательных выражениях для искомых величин будем иметь вещественные величины следующего вида:

$$Q_b^{(0)}\left(\gamma,\eta,\zeta\right) = A_{1n}^{(0)}\operatorname{Re}\tilde{Q}_{bn} + A_{2n}^{(0)}\operatorname{Im}\tilde{Q}_{bn}, \qquad (3.16)$$

где $\tilde{Q}_{bn} = Q_{bn}\exp\left(-\lambda_{pn}\gamma\right)$, $Q_{bn}-$ коэффициент при $G_{1bn}^{(0)}(\eta)$ для данной величины.

Решение уравнения (3.6) относительно $Z_{Vb}^{(0)}$ будем искать в виде

$$Z_{Vb}^{(0)} = C_b^{(0)}(\eta)\exp\theta\zeta. \qquad (3.17)$$

В результате имеем следующее характеристическое уравнение для определения θ:

$$\frac{1}{a_{44}}\theta^2 + \frac{1}{a_{66}}\lambda^2 + \Omega_*^2 - 2iK\Omega_* = 0, \qquad (3.18)$$

решением которого является

$$\theta_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 - a_{44}\Omega_*^2 + i2Ka_{44}\Omega_*}\,. \tag{3.19}$$

Согласно (3.17) для $Z_{Vb}^{(0)}$ будем иметь

$$Z_{Vb}^{(0)} = \sum_{i=1}^{2} C_{ib}^{(0)}(\eta)\exp\theta_i\zeta\,. \tag{3.20}$$

Условиями для $Z_{Vb}^{(0)}$, вытекающими из граничных условий (3.1),(3.2), согласно (3.4) будут

$$\frac{\partial Z_{Vb}^{(0)}}{\partial\zeta} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1\,. \tag{3.21}$$

Удовлетворив условиям (3.21), получим систему

$$\sum_{i=1}^{2} C_{ib}^{(0)}(\eta)\theta_i\exp\theta_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{2} C_{ib}^{(0)}(\eta)\theta_i\exp(-\theta_i) = 0\ , \tag{3.22}$$

определитель которой должен равняться нулю, т. е.

$$\theta_1\theta_2\operatorname{sh}(\theta_1-\theta_2) = 0\,. \tag{3.23}$$

Учитывая, что $\theta_2 = -\theta_1$, из (3.23) получим следующие уравнения для определения λ_a, соответствующие симметричной и антисимметричной задачам:

$$i\sqrt{-\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 - a_{44}\Omega_*^2 + i2Ka_{44}\Omega_*} = \pi n\,, \quad i\sqrt{-\frac{a_{44}}{a_{66}}\lambda^2 - a_{44}\Omega_*^2 + i2Ka_{44}\Omega_*} = \frac{\pi}{2}(2n+1)\,. \tag{3.24}$$

Решив эти уравнения, получим следующие значения для показателей убывания краевых эффектов в антиплоской задаче:

$$\lambda_{an} = \pm\sqrt{a_{66}\left(\frac{\pi^2 n^2}{a_{44}} - \Omega_*^2 + 2iK\Omega_*\right)} \text{ или } \lambda_{an} = \pm\sqrt{a_{66}\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4a_{44}} - \Omega_*^2 + 2iK\Omega_*\right)},\ n\in N\,. \tag{3.25}$$

Из (3.22) имеем $C_{2b}^{(0)}(\eta) = C_{1b}^{(0)}(\eta)\exp 2\theta_1$. Следовательно, для функции $Z_{Vb}^{(0)}$ получим

$$Z_{Vb}^{(0)} = C_{1b}^{(0)}(\eta)\left(\exp\theta_1\zeta + \exp\theta_1(2-\zeta)\right). \tag{3.26}$$

В симметричной задаче $Z_{Vb}^{(0)}$ примет вид

$$Z_{Vbn}^{(0)} = C_{1bn}^{(0)}(\eta)2\cos\pi n\zeta\,.$$

Учитывая, что $V_{1b}^{(0)} = \left(Z_{Vb}^{(0)} + \bar{Z}_{Vb}^{(0)}\right)\big/2$, $V_{2b}^{(0)} = \left(Z_{Vb}^{(0)} - \bar{Z}_{Vb}^{(0)}\right)\big/2i$, в симметричной задаче для тангенциального компонента вектора перемещения $V_b^{(0)}$ и напряжений $\sigma_{xyb}^{(0)}, \sigma_{yzb}^{(0)}$ будем иметь:

$$\begin{gathered} V_{1bn}^{(0)} = C_{1bn}^{(0)}(\eta)2\cos\pi n\zeta,\ V_{2bn}^{(0)} = 0,\quad \sigma_{xy1bn}^{(0)} = -C_{1bn}^{(0)}(\eta)\frac{2\lambda_{an}}{a_{66}}\cos\pi n\zeta,\ \sigma_{xy2bn}^{(0)} = 0 \\ \sigma_{yz1bn}^{(0)} = -C_{1bn}^{(0)}(\eta)\frac{2\pi n}{a_{44}}\sin\pi n\zeta,\ \sigma_{yz2bn}^{(0)} = 0 \end{gathered} \tag{3.27}$$

Другие компоненты вектора перемещения и тензора напряжений равны нулю. В антисимметричной задаче имеем:

$$V_{1bn}^{(0)}=0,\ V_{2bn}^{(0)}=2C_{1bn}^{(0)}(\eta)\sin\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta,\ \ \sigma_{xy2bn}^{(0)}=-C_{1bn}^{(0)}(\eta)\frac{2\lambda_{an}}{a_{66}}\sin\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta,\ \sigma_{xy1bn}^{(0)}=0,$$
$$\sigma_{yz2bn}^{(0)}=C_{1bn}^{(0)}(\eta)\frac{\pi\left(2n+1\right)}{a_{44}}\cos\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta,\ \sigma_{yz1bn}^{(0)}=0 \qquad (3.28)$$

а остальные величины равны нулю. Итак, все искомые величины в пограничном слое известны и пропорциональны $\exp\left(-\lambda\gamma\right)$, т.е. $Q_b\sim\exp\left(-\lambda\gamma\right)$, где реальная положительная часть коэффициента λ описывает скорость затухания пограничного слоя. В табл. 1, 2 приведены первые шесть значений корней λ_p и λ_a соответственно для пластинки из СВАМ 10:1: ($E_1=38.259\times10^9$ Па, $E_2=17.658\times10^9$ Па, $E_3=9.6138\times10^9$ Па, $G_{12}=5.1993\times10^9$ Па, $G_{13}=3.8357\times10^9$ Па, $G_{23}=3.1392\times10^9$ Па, $\nu_{12}=0.22$, $\nu_{23}=0.31$, $\nu_{31}=0.07$, $h=0.5$ м, $\rho=1900$ кг/м^3, $f_1=0.2$, $\Omega=2\pi/0.1$), и из стеклопластика СТЭТ: ($E_1=35.2179\times10^9$ Па, $E_2=28.7433\times10^9$ Па, $E_3=17.9523\times10^9$ Па, $G_{12}=7.4556\times10^9$ Па, $G_{13}=6.4746\times10^9$ Па, $G_{23}=6.1803\times10^9$ Па, $\nu_{12}=0.177$, $\nu_{31}=0.157$, $h=0.5$ м, $\rho=1900$ кг/м^3, $\mathrm{k}=0.2$, $\Omega=2\pi/0.1c^{-1}$).

Таблица 1

	λ_p	λ_a
1	$0.4578645-\ 6.73\times10^{-10}\ i$	0.896929
2	$0.4578645+6.73\times10^{-10}\ i$	2.29646
3	$0.8963157-0.2i$	3.56686
4	$0.8963157+0.2i$	4.81152
5	$1.4112167-4\times10^{-10}\ i$	6.04636
6	$1.4112167+4\times10^{-10}\ i$	7.27639

Таблица 2

	λ_p	λ_a
1	$0.0869387-\ 0.2907i$	1.25198
2	$0.0869387+\ 0.2907i$	2.77552
3	$0.7768733-\ 3.368\times10^{-10}\ i$	4.23441
4	$0.7768733+\ 3.368\times10^{-10}\ i$	5.6787
5	$1.2106707-0.2267i$	7.11729
6	$1.2106707+\ 0.2267i$	8.55304

Из этих таблиц видно, что для пластин из указанных материалов величины в антиплоском пограничном слое затухают быстрее, чем в плоском. Отметим также, что в исходном приближении решения плоского и антиплоского пограничных слоев независимы.

Построение приближений $s\geq1$ для пограничного слоя можно осуществить подобным образом. Здесь лишь отметим, что при $s\geq1$ необходимо решить неоднородные уравнения (3.5) для каждого из значений λ_{pn} и λ_{an}, что приведет к тому, что плоский пограничный слой будет порождать антиплоский сопутствующий пограничный слой и наоборот; их величины будут убывать соответственно как $\exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_{pn}\gamma\right)$ и $\exp\left(-\operatorname{Re}\lambda_{an}\gamma\right)$. Однако величины сопутствующих пограничных слоев по абсолютной величине на порядок меньше основных. Поэтому, с позиций практических приложений, учет приближений $s \geq 1$ вряд ли будет представлять интерес.

4. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя. Теперь рассмотрим вопрос сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя. Пусть на боковой поверхности $x=0$ заданы условия:

$$\sigma_{xx}=\varphi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xy}=\psi(\eta,\zeta),\ \sigma_{xz}=\chi(\eta,\zeta)\ \text{(в частности, } \sigma_{xx}=\sigma_{xy}=\sigma_{xz}=0\text{)}. \quad (4.1)$$

Учитывая, что $I=I^{\text{int}}+I_b$, где I^{int} уже известно, из условий (4.1) определяются неизвестные постоянные пограничного слоя. Для определения этих постоянных (функций от η) используем метод наименьших квадратов. В плоской задаче, минимизируя интеграл средней квадратичной погрешности J_p

$$J_p=\int_{-1}^{1}\left[\left(\sigma_{xx}^{\text{int}}(x=0)+\sigma_{xxb}(x=0)-\varphi(\eta,\zeta)\right)^2+\left(\sigma_{xz}^{\text{int}}(x=0)+\sigma_{xzb}(x=0)-\chi(\eta,\zeta)\right)^2\right]d\zeta, \quad (4.2)$$

получим систему

$$\frac{\partial J_p}{\partial A_{1n}^{(0)}}=\frac{\partial J_p}{\partial A_{2n}^{(0)}}=0. \quad (4.3)$$

Из системы (4.3) определяются коэффициенты $A_{1n}^{(0)}, A_{2n}^{(0)}$. В антиплоской задаче $C_{1bn}^{(0)}(\eta)$ можно сразу определить, используя метод Фурье:

$$C_{1bn}^{(0)}(\eta)=-\frac{a_{66}h}{2\lambda_{an}l}\int_{-1}^{1}\psi(\eta,\zeta)\cos\pi n\zeta\, d\zeta \ \text{ в симметричной задаче,}$$

$$C_{1bn}^{(0)}(\eta)=-\frac{a_{66}h}{2\lambda_{an}l}\int_{-1}^{1}\psi(\eta,\zeta)\sin\frac{\pi}{2}(2n+1)\zeta\, d\zeta \ \text{ в антисимметричной задаче.}$$

Институт механики НАН РА

Академик Л. А. Агаловян, М. З. Саргсян

К решению трехмерной смешанной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях ортотропной пластины с учетом внутреннего вязкого трения, когда на верхнюю лицевую плоскость пластины действует вынуждающее воздействие. Асимптотическим методом исследовано напряженно-

деформированное состояние как во внутренней задаче, так и в пограничном слое. Проведено сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя.

Academician L. A. Aghalovyan, M. Z. Sargsyan

About Solution of the Three-Dimensional Mixed Dynamic Problem on Vibrations of the Ortotropic Plate, Taking into Account the Internal Viscous Friction

The problem on forced vibrations of orthotropic plate taking into account an internal viscous friction, when on the upper plane of the plate affects a forcing action, are considered. By the asymptotic method the stress-deformed state of the plate both in the inner problem and in the boundary layer are investigated. A way of conjugation of the solution of inner problem and the boundary layer is shown.

Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան, Մ. Զ. Սարգսյան

Ներքին մածուցիկ շփման հաշվառմամբ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների եռաչափ խառը դինամիկական խնդրի լուծման մասին

Դիտարկված է օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումների խնդիրը ներքին մածուցիկ շփման հաշվառմամբ, երբ սալի վերին մակերևույթի վրա տրված է հարկադրող ազդեցությունը: Ասիմպտոտիկ մեթոդով ուսումնասիրված է սալի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը ինչպես ներքին խնդրում, այնպես էլ սահմանային շերտում: Կատարված է ներքին խնդրի և սահմանային շերտի լուծումների լծորդումը:

Литература

1. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек М. Наука. Физматлит. 1997. 414 с.

2. *Агаловян Л. А., Агаловян М. Л.* В сб.: Проблемы механики деформируемых тел. Ереван. Изд-во “Гитутюн” НАН РА. 2003. С. 57-67.

3. *Агаловян Л. А.* В: Межвуз. сб. “Механика”. Изд. ЕГУ. 1982. Вып. 2. С. 7-12.

4. *Саргсян М.З.* В сб.: Механика 2009: Тр. междунар. школы-конференции молодых ученых. М 550. Ереван. Изд-во ЕГУАС. 2009. С. 297-303.