ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517. 53

С. Л. Берберян

О некоторых теоремах единственности для субгармонических функций

(Представлено академиком В.С. Захаряном 1/II 2010)

Ключевые слова: *субгармонические и логарифмически субгармонические функции, нормальные функции, угловые граничные значения, предельные множества, неевклидово расстояние*

В настоящей работе исследуются теоремы единственности субгармонических функций, определенных в единичном круге, в зависимости от граничного поведения этих функций. Теоремам единственности посвящены многочисленные работы, в частности [1-3]. Будем придерживаться общепринятых обозначений. Обозначим через D, Γ и $h(\xi,\varphi)$ соответственно единичный круг $|z|<1$, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол $\varphi; -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Обозначим через $L(\xi,\varphi)$ гиперцикл, проходящий через точки $\xi=e^{i\theta}$, $-\xi$, который образует угол φ с диаметром Λ^{θ}, соединяющим точки ξ и $-\xi$. Пусть $H(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ − область, ограниченная двумя гиперциклами $L(\xi,\varphi_1)$ и $L(\xi,\varphi_2)$. Неотрицательная субгармоническая функция $f(z)$, определённая в D, называется логарифмически субгармонической, если $\log f(z)$ субгармоническая функция. Точку $\xi\in\Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$, где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1',\varphi_2'\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Интерпретируя круг D как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,z_2)$ неевклидово расстояние между точками z_1,z_2 из круга D:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\ \text{где}\ u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\overline{z}_2}\right|.$$

Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т.е. $C(f,\xi,S)=\bigcap\overline{f(S\bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α, то говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловое значение α. Придерживаясь обозначений из работы [4], скажем, что действительнозначная функция $f(z)\in\Re$, если на группе T: $\mathrm{T}=\{S(z);S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1}$, a

− произвольная точка в D, α − произвольное действительное число $\}$ всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi:\{f(S(z));\ S(z)\in \mathrm{T}\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z)\in \mathrm{T}$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K.

Если *c* − некоторая жорданова дуга, лежащая в круге D, то неевклидовый диаметр *d(c)* дуги *c* есть *d(c)*=$\sup\sigma(z_1,z_2)$, где z_1,z_2 произвольные точки, принадлежащие дуге *c*.

Говорят, что последовательность непересекающихся жордановых дуг $\{\gamma_n\}$, лежащих в круге D, сходится к граничной дуге $\gamma:\{e^{i\theta};\varphi_1\le\theta\le\varphi_2\}$, где $0\le\varphi_1<\varphi_2\le 2\pi$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер *N*, что для всех *n*, больших *N*, справедливы соотношения:

1) $\gamma_n\subset\{1-\varepsilon<|z|<1\}$

2) $|\inf\limits_{z\in\gamma_n}\arg z-\varphi_1|<\varepsilon,\quad |\sup\limits_{z\in\gamma_n}\arg z-\varphi_2|<\varepsilon$

Назовем, следуя работе [3], последовательность точек $\{z_k\}$ круга D (B)-последовательностью, отнесенной к граничной дуге $\gamma\subset\Gamma$, если

1) последовательность $\{z_k\}$ лежит на некоторой последовательности непересекающихся жордановых дуг $\{\gamma_n\}$, сходящихся к дуге $\gamma\subset\Gamma$;

2) существует такое конечное неотрицательное число *M*, что для всех номеров *n* любая дуга *c*, лежащая на $\{\gamma_n\}$ и имеющая неевклидовый диаметр, не меньший *M*, содержит хотя бы одну точку последовательности $\{z_k\}$.

Сформулируем результаты работы.

Теорема 1. *Пусть логарифмически субгармоническая в* D *функция* $f(z)$ *из класса* $\Re$ *не принимает конечного значения* α *в некоторой окрестности дуги* $\gamma \subset \Gamma$ *. Если существует такая последовательность* $\{z_n\}$ *, что* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sigma(z_n, z_{n+1}) \le M < +\infty$*,* $\{z_n\}$ *имеет хотя бы две предельные точки* $e^{i\gamma_1}$*,* $e^{i\gamma_2}$ *на дуге* γ *и* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$*, то* $f(z) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ *− субгармоническая функция, определенная в* D*, и для некоторой граничной дуги* $\gamma : \{e^{i\theta}; \varphi_1 \le \theta \le \varphi_2\}$ *можно указать такую (B)-последовательность точек* $\{z_k\}$*, что* $\lim_{k\to\infty} f(z_k) = -\infty$ *и функция* $f(z)$ *имеет угловые граничные значения на некотором множестве* E *дуги* γ*,* $mess\,E > 0$*. Тогда* $f(z) \equiv -\infty$.

Для доказательства теорем предварительно рассмотрим леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)$ *− логарифмически субгармоническая функция класса* $\Re$*, не принимающая конечного значения* α *в некоторой окрестности дуги* $\gamma \subset \Gamma$ *. Если существует последовательность* $\{z_n\}$ *такая, что* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sigma(z_n, z_{n+1}) \le M < +\infty$*,* $\{z_n\}$ *имеет хотя бы две предельные точки* $e^{i\gamma_1}$*,* $e^{i\gamma_2}$ *на дуге* γ *и* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$*, то* $f(z)$ *имеет почти всюду на дуге (*$e^{i\gamma_1}$*,* $e^{i\gamma_2}$*) угловые граничные значения, равные 0 .*

Доказательство леммы 1. Из нормальности субгармонической функции $f(z)$ следует её непрерывность. В силу теоремы Коши в указанной окрестности дуги γ или $f(z) < \alpha$ или $f(z) > \alpha$. Так как последовательность $\{z_n\}$ лежит в этой окрестности γ , то $f(z) < \alpha$. С помощью функции $z = \varphi(\omega)$ конформно отобразим единичный круг $D_1 : |\omega| < 1$ на указанную окрестность дуги γ . Тогда функция $\psi(\omega) = f(\varphi(\omega))$ субгармоническая функция, ограниченная сверху числом α в круге D_1, и поэтому почти всюду на $\Gamma_1 : |\omega| = 1$ имеет радиальные пределы. Так как при конформных отображениях почти всюду некасательные пути переходят в некасательные пути, то почти в каждой точке $\xi \in \gamma \setminus E$, $mesE = 0$, функция $f(z)$ имеет предел β_ξ по некоторому некасательному пути L_ξ. В силу утверждения леммы 2 из [5] в каждой точке $\xi \in (\gamma \setminus E) \bigcap K(f)$, где $mes((\gamma \setminus E) \bigcap K(f)) = mes\gamma$, функция $f(z)$ имеет угловой предел β_ξ. Рассмотрим произвольную точку ξ, которая является внутренней точкой для дуги $(e^{i\gamma_1},\ e^{i\gamma_2})$ и $\xi \in (\gamma \setminus E) \bigcap K(f)$. Предположим, что β_ξ не равно нулю. Выберем угол γ такой, что $0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ и

$$M < \sigma(0, tg\frac{\gamma}{2}), \tag{1}$$

где $\sigma(0, tg\dfrac{\gamma}{2})$ есть неевклидово расстояние от любой точки гиперциклов $L(\xi, \gamma)$ и $L(\xi, -\gamma)$ до диаметра Λ^ξ, соединяющего точки $-\xi$ и ξ. Обозначим область, ограниченную этими гиперциклами $H(\xi, -\gamma, \gamma)$. Из сделанного предположения следует, что

$$\lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in H(\xi, -\gamma, \gamma)}} f(z) = \beta \neq -\infty . \tag{2}$$

Из соотношения (1), согласно предположению, будем иметь, что точки $\{z_n\}$ начиная с достаточно большого n не должны лежать в области $H(\xi, -\gamma, \gamma)$. С другой стороны, всякая точка дуги $(e^{i\gamma_1},\ e^{i\gamma_2})$ является предельной точкой для последовательности $\{z_n\}$. Поэтому для бесконечного числа значений n точки

z_n и z_{n+1} лежат на противоположных гиперциклах $L(\xi,\gamma)$ и $L(\xi,-\gamma)$, ограничивающих область $H(\xi,-\gamma,\gamma)$. Следовательно, для бесконечного числа значений n $\sigma(z_n,z_{n+1}) \geq 2\sigma(0,tg\frac{\gamma}{2})$, что невозможно в силу соотношения (1). Полученное противоречие говорит о том, что β_ξ должно равняться нулю. Отсюда следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ − субгармоническая функция, определенная в D, и для некоторой дуги $\gamma:\{e^{i\theta};\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2\}$ можно указать такую (B)-последовательность точек $\{z_k\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = -\infty$ и функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения на некотором множестве E дуги γ, $mess\, E > 0$. Тогда почти всюду на множестве E функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения, равные $-\infty$.*

Доказательство. При доказательстве мы будем придерживаться схемы, предложенной для мероморфных функций в работе [3]. Обозначим через β_ξ соответствующие угловые пределы. Не нарушая общности, можно считать, что множество E целиком лежит на некоторой дуге $\delta \subset \gamma$ и концевые точки δ являются предельными точками множества E. Рассмотрим такую точку $\xi \in E$, которая является внутренней для δ и в которой функция $f(z)$ имеет угловой предел $\beta_\xi \neq -\infty$. Выберем такой угол φ, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $M < \sigma\left(0, tg\frac{\varphi}{2}\right)$, где $M < +\infty$ постоянная, фигурирующая в определении (B)-последовательностей и $\sigma\left(0,\, tg\frac{\varphi}{2}\right)$ − неевклидово расстояние от любой точки гиперциклов $L(\xi,-\varphi)$ и $L(\xi,\varphi)$ до диаметра Λ^ξ, соединяющего точки $-\xi$ и ξ. В достаточно малой окрестности точки ξ каждая точка области $H(\xi,-\varphi,\varphi)$ лежит в углу $\Delta(\xi,-\varphi,\varphi)$ и

$$\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in\Delta(\xi,-\varphi\varphi)}} f(z)=\beta_\xi\neq-\infty. \qquad (3)$$

Начиная с некоторого номера N_0, все дуги γ_n, $n\geq N_0$, последовательности дуг $\{\gamma_n\}$ из определения (В)-последовательности будут пересекать область $H(\xi,-\varphi,\varphi)$. Обозначим общие части через α_n, $n\geq N_0$. Согласно условию $\lim_{k\to\infty} f(z_k)=-\infty$ и соотношению (3) ни одна из дуг α_n, $n\geq N_0$, не содержит точек (В)-последовательности $\{z_k\}$. С другой стороны, каждая граничная точка области $H(\xi,-\varphi,\varphi)$ (кроме точки ξ) отстоит на неевклидовом расстоянии $\sigma\left(0,tg\dfrac{\varphi}{2}\right)$ до диаметра Λ^ξ, соединяющего точки ξ и $-\xi$. Дуги α_n, $n\geq N_0$, соединяют точки, лежащие на противоположных сторонах границы области $H(\xi,-\varphi,\varphi)$ и, значит, неевклидов диаметр $d(\alpha_n)>M$ для $n\geq N_0$. Согласно определению (В)- последовательностей, каждая дуга α_n, $n\geq N_0$, должна содержать хотя бы одну точку последовательности $\{z_k\}$. Полученное противоречие показывает, что почти во всех точках $\xi\in E.\ \operatorname{mess} E>0$, функция $f(z)$ имеет угловой предел, равный $-\infty$. Утверждение леммы 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. Из утверждения леммы 1 следует, что в силу теоремы единственности для логарифмически субгармонических функций (см.[6]) $f(z)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ − логарифмически субгармоническая в D

функция. Если существует последовательность $\{z_n\}$ такая, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma(z_n, z_{n+1}) \le M < +\infty$, $\{z_n\}$ имеет хотя бы две предельные точки $e^{i\gamma_1}$, $e^{i\gamma_2}$ на дуге γ, $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ и $f(z)$ имеет почти всюду на дуге ($e^{i\gamma_1}$, $e^{i\gamma_2}$) угловые граничные значения, то $f(z) \equiv 0$.

Действительно, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим, что почти всюду на дуге ($e^{i\gamma_1}$, $e^{i\gamma_2}$) угловые граничные пределы функции $f(z)$ равны 0. Отсюда утверждение следствия вытекает из теоремы единственности для логарифмически субгармонических функций.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из утверждения леммы 2 и теоремы единственности для субгармонических функций, если рассматривать функцию $\exp(f(z))$.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ − логарифмически субгармоническая функция, определенная в D, и для некоторой дуги $\gamma : \{e^{i\theta}; \varphi_1 \le \theta \le \varphi_2\}$ можно указать такую (B)-последовательность точек $\{z_n\}$, что функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения на некотором множестве E дуги γ, $\operatorname{mes} E > 0$ и $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Тогда $f(z) \equiv 0$.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет

С. Л. Берберян

О некоторых теоремах единственности для субгармонических функций

Рассматриваются теоремы единственности субгармонических функций, определённых в единичном круге в зависимости от их граничного поведения. В условиях теорем существенную роль играет неевклидово расстояние.

Ս. Լ. Բերբերյան

Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների որոշ միակության թեորեմների մասին

Ներկա աշխատանքում կախված եզրային վարքից՝ դիտարկվում են միավոր շրջանում որոշված սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միակության թեորեմներ։ Այդ թեորեմների պայմաններում էական դեր է խաղում ոչ էվկլիդյան հեռավորությունը։

S. L. Berberyan

Some Uniqueness Theorems for Subharmonic Functions

The article deals with the uniqueness theorems of subharmonic functions defined in the unit circle, depending on their boundary behaviour. In terms of theorem non-euclidean distance plays a significant role.

Литература

1. *Джрбашян М.М.* - Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. N6. С.1262-1339.
2. *Джрбашян М.М., Захарян В.С.* Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. 1993. М. Изд. фирма «Физ.-матем. литература». 224 с.
3. *Гаврилов В. И.* - Сиб. матем. журнал. 1965. Т. 6. N 6. С. 1227-1233.
4. *Гаврилов В. И.* - ДАН СССР. 1978. Т. 240. N4. С. 768-770.
5. *Berberyan S.L.* - Mathematica Montisnigri. 2007-2008. V. XX- XXI. P. 5 - 14.
6. *Лозинский С.М.* - Изв. АН СССР. Сер. матем. 1944. Т. 8. N4. С.175-194.
7. *Джрбашян А.М.* - Изв.НАН Армении. Математика. 1995. Т. 30. N2. С.47-75.
8. *Берберян С.Л.* - Успехи матем. наук. 2007. Т. 62. Вып. 3. С. 207-208.
9. *Gardiner S.I.* - J. London Math. Soc. 1993. V. 48. P. 515-525.
10. *Pavicevic Z., Susic I.* - Matematiqki vesnik. 1998. N50. P. 83-87.