ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

В. Ж. Думанян

О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 28/I 2010)

Ключевые слова: *эллиптические уравнения, задача Дирихле, разрешимость задачи Дирихле*

Работа посвящена исследованию задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей ∂Q для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}u \equiv -div\,(A(x)\nabla u) + (b(x), \nabla u) - div(c(x)u) + d(x)u = f(x) - divF(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \quad (2)$$

с $u_0 \in L_2(\partial Q)$; функции f и $F = (f_1, \ \dots, \ f_n)$ принадлежат $L_{2,\,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{i\,j}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\xi_i\xi_j = (\xi,\ A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ \dots, \xi_n) \in R_n$ и п.в. $x \in Q$ с положительной постоянной γ, а коэффициенты $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Как и в работах [1,2], посвященных изучению поведения решения задачи (1),(2) вблизи границы области Q (см.также работы [3-6]), будем предполагать, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини

$$\left|\bar{\nu}\,(x) - \bar{\nu}\,(y)\right| \le \omega\left(|x-y|\right) \tag{3}$$

для всех x и y из ∂Q, где ω — такая монотонная функция, что

$$\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty,$$

а коэффициенты $a_{i\,j}$ непрерывны по Дини на границе

$$|a_{i\,j}(x) - a_{i\,j}(y)| \le \omega\left(|x-y|\right) \tag{4}$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$; не ограничивая общности, можно считать, что функция ω в условиях (3) и (4) одна и та же.

Относительно коэффициентов $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ и правой части будем предполагать выполнение следующих условий:
существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$|b(x)| \le \frac{K}{r(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q,$$

$$\int\limits_0 t(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}} C^2(t)\,dt < \infty, \quad \text{где } \ C(t) \equiv \sup_{r(x)\ge t} |c(x)|,$$

$$\int\limits_0 t^3(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t)\,dt < \infty, \quad \text{где } \ D(t) \equiv \sup_{r(x)\ge t} |d(x)|,$$

$$r^{\frac{1}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|F(x)| \in L_2(Q), \tag{5}$$

$$r^{\frac{3}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,|f(x)| \in L_2(Q), \tag{6}$$

где $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,\,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций (см.[7]), т.е. такую, что для всех $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q (A(x)\nabla u + c(x)u,\ \nabla\eta)\,dx + \int\limits_Q \left((b(x),\ \nabla u) + d(x)u\right)\eta\,dx = \int\limits_Q \left(f\eta + (F,\ \nabla\eta)\right)\,dx,$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле:
для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int\limits_{V_{x^0}} \Big(u(x+\delta\,\bar{\nu}\,(x^0)) - u_0(x)\Big)^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Целью настоящей работы является исследование разрешимости задачи (1),(2).

В работах [1,2] установлено, что решение u задачи (1),(2) (если оно существует) принадлежит пространству А.К.Гущина $(n-1)$-мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций $C_{n-1}(\bar{Q})$ и ограничен весовой интеграл Дирихле $\int\limits_Q r(x)|\nabla u(x)|^2 dx < \infty$. Напомним, что банахово пространство $(n-1)$-мерно непрерывных в $\bar{Q}$ функций является пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, порожденной (точнее см.[3]) функционалом

$$\ell(v) = \int\limits_0^{\infty} M_{n-1}\left(\left\{x \in \bar{Q}\ :\ |v(x)|^2 > \lambda\right\}\right)\, d\lambda, \quad v \in C(\bar{Q}),$$

в котором

$$M_{n-1}(E) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{n-1}\,,\ \bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}_{r_i} \supset E\right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $\mathcal{B}_{r_i}$ радиуса r_i. Отметим только, что функции из $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$ имеют следы на любом замкнутом множестве $\Gamma \subset \bar{Q}$ положительной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа и если $\Gamma \subset \partial Q \in C^1$, то множество таких следов совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим следующие задачи Дирихле:

$$\begin{cases} -div\,(A(x)\nabla v) = 0, & (7)\\ v|_{\partial Q} = u_0, & (8)\end{cases}$$

$$\begin{cases} -div\,(A\nabla w) = -(b,\nabla w) + div(cw) - dw - (b,\nabla v) + div(cv) - dv + f - divF, & (9)\\ w|_{\partial Q} = 0, & (10)\end{cases}$$

где функция v в правой части уравнения (9) есть решение задачи (7), (8).

Имеет место следующее

Утверждение 1. *Пусть функция v является решением задачи (7), (8). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась решением задачи (9), (10).*

Задача (7), (8) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [3]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива следующая оценка:

$$\|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla v|^2 dx \le const\ \|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}\,,$$

с не зависящей от u_0 постоянной.

Следовательно, в силу утверждения 1 задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (9), (10).

Введем следующие пространства:

$$\mathcal{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W^1_{2,loc} : \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx < \infty,\ u \in C_{n-1}(\bar{Q}) \right\},$$

$$\|u\|^2_{\mathcal{U}(Q)} = \|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx,$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q) \equiv \left\{ u \in \mathcal{U}(Q),\ u|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Следуя [4], обозначим через $\overset{\circ}{H}_1(Q)$ пополнение $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u,v)_{\overset{\circ}{H}_1(Q)} = \int\limits_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r\ (1 + |\ln r|)^{3/2}}\, dx\,,$$

а через $\overset{\circ}{H}(Q)$ пополнение $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u,v)_{\overset{\circ}{H}(Q)} = \int\limits_Q \left(r\,(1 + |\ln r|)^{1/2}\,(\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r\ (1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx\,.$$

Теорема 1. *Имеют место следующие вложения:*

$$\overset{\circ}{H}_1(Q) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q) \subset \overset{\circ}{H}(Q) \subset \overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q).$$

Так как решения задач (1), (2) и (7), (8) принадлежат пространству $\mathcal{U}(Q)$, см. [1-3], то из утверждения 1 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Решение w задачи (9), (10) принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$.*

Рассмотрим, далее оператор $Tu = -(b, \nabla u) + div(cu) - du$ из правой части уравнения (9).

Теорема 2. *T является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в сопряженное к $\overset{\circ}{H}_1(Q)$ пространство $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$.*

В [4] установлено, что для любой правой части $g' \in \left[\overset{\circ}{H}_1 (Q)\right]^*$ существует решение задачи

$$-div(A\nabla u) = g', \qquad u|_{\partial Q} = 0, \tag{11}$$

оно принадлежит пространству $\overset{\circ}{H} (Q)$ и имеет место оценка $\|u\|_{\overset{\circ}{H}(Q)} \leq C\|g'\|$. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части $g' \in \left[\overset{\circ}{H}_1 (Q)\right]^*$ решение u (из $\overset{\circ}{H} (Q)$) задачи (11), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\left[\overset{\circ}{H}_1 (Q)\right]^*$ в $\overset{\circ}{H} (Q)$. Таким образом справедлива

Теорема 3. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{H} (Q)$.*

Пусть w является решением задачи (9), (10). Тогда нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw+\mathcal{L}_0^{-1}Tv+\mathcal{L}_0^{-1}(f-divF)$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{U}} (Q)$, где v — решение задачи (7), (8). Справедливо также обратное утверждение, а именно

Утверждение 3. *w является решением задачи (9), (10) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения*

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \qquad w \in \overset{\circ}{\mathcal{U}} (Q), \tag{12}$$

с $g = Tv + f - divF$.

Заметим, что при выполнении условий (5), (6) слагаемое $f - divF$ в правой части уравнения (9) принадлежит $\left[\overset{\circ}{H}_1 (Q)\right]^*$ (см. [4]). Далее, наряду с уравнением (12) рассмотрим соответствующее уравнение в пространстве $\overset{\circ}{H} (Q)$:

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \qquad w \in \overset{\circ}{H} (Q). \tag{13}$$

Утверждение 4. *Для любого $g \in \left[\overset{\circ}{H}_1 (Q)\right]^*$ решение (в $\overset{\circ}{\mathcal{U}} (Q)$) уравнения (12) является решением (в $\overset{\circ}{H} (Q)$) уравнения (13) с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.*

Замечание. На самом деле справедливо более сильное утверждение, а именно, если правая часть уравнения (12) из $\overset{\circ}{H} (Q)$, то решение также принадлежит $\overset{\circ}{H} (Q)$.

Объединяя утверждения 3 и 4, получаем:

Теорема 4. *Для того чтобы функция w являлась решением задачи (9), (10), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением уравнения (13) с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF)$, где v решение задачи (7), (8).*

Далее, если рассмотреть оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $\overset{\circ}{H}(Q)$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$.*

Таким образом, изучение разрешимости задачи (1), (2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (13) с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$. В силу теорем Фредгольма для разрешимости уравнения (13) необходима и достаточна ортогональность правой части h уравнения (13) подпространству решений сопряженной однородной задачи. В частности, уравнение (13) имеет решение при любой h из $\overset{\circ}{H}(Q)$, если однородное уравнение

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \qquad w \in \overset{\circ}{H}(Q), \tag{14}$$

имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Но в силу теоремы 4 решение уравнения (14) является решением однородной задачи

$$\mathcal{L}w = 0, \qquad w|_{\partial Q} = 0. \tag{15}$$

Тем самым для задачи (1),(2) имеет место следующая теорема об однозначной разрешимости.

Теорема 6. *Пусть однородная задача (15) имеет только тривиальное решение. Тогда решение задачи (1),(2) существует при всех u_0, f, F. Оно принадлежит пространству $\mathcal{U}(Q)$ и для него справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx \le const\,(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int\limits_Q r^3(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}\, f^2(x)dx +$$

$$\int\limits_Q r(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}\,|F(x)|^2 dx),$$

с не зависящей от u_0, f и F постоянной.

Ереванский государственный университет
E-mail: duman@ysu.am

В. Ж. Думанян

О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка

Получены условия разрешимости задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области Q с гладкой границей ∂Q

$$-div\,(A(x)\nabla u)+(b(x),\nabla u)-div(c(x)u)+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q).$$

В частности, если однородная задача имеет только тривиальное решение, то при всех u_0, f, F задача имеет решение, оно принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}+\int\limits_Q r|\nabla u|^2dx\le C(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}+\int\limits_Q r^3\left(1+|\ln r|\right)^{\frac{3}{2}}f^2dx+\int\limits_Q r\left(1+|\ln r|\right)^{\frac{3}{2}}|F|^2dx),$$

где $r(x)$ − расстояние точки $x\in Q$ до границы ∂Q, постоянная C не зависит от u_0, f, F.

Վ. Ժ. Դումանյան

Երկրորդ կարգի էլիպսական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության մասին

Ստացվել են ∂Q ողորկ եզրով Q սահմանափակ տիրույթում երկրորդ կարգի գծային էլիպսական հավասարման համար

$$-div\,(A(x)\nabla u)+(b(x),\nabla u)-div(c(x)u)+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q),$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծելիության պայմաններ: Մասնավորապես, եթե համասեռ խնդիրը ունի միայն զրոյական լուծում, ապա բոլոր u_0, f, F-երի համար խնդիրը ունի լուծում, որը պատկանում է Գուշչինի $C_{n-1}(\bar{Q})$ տարածությանը եւ տեղի ունի հետեւյալ անհավասարությունը՝

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}+\int\limits_Q r|\nabla u|^2dx\le C(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}+\int\limits_Q r^3\left(1+|\ln r|\right)^{\frac{3}{2}}f^2dx+\int\limits_Q r\left(1+|\ln r|\right)^{\frac{3}{2}}|F|^2dx),$$

որտեղ $r(x)$-ը $x\in Q$ կետի հեռավորությունն է ∂Q եզրից, C հաստատունը կախված չէ u_0, f, F-ից:

V. Zh. Dumanyan

On Solvability of Dirichlet Problem for the Second Order Elliptic Equation

Conditions of solvability of the Dirichlet problem in a bounded domain Q with smooth boundary ∂Q for the second order elliptic equation are obtained

$$-div\,(A(x)\nabla u) + (b(x), \nabla u) - div(c(x)u) + d(x)u = f(x) - div F(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0 \in L_2(\partial Q).$$

In particular, if the homogeneous problem has only the trivial solution then for all u_0, f, F the solution of the problem exists and belongs to Gushchin's space $C_{n-1}(\bar{Q})$ and the following inequality holds

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int_Q r|\nabla u|^2 dx \le C(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int_Q r^3 \left(1 + |\ln r|\right)^{\frac{3}{2}} f^2 dx + \int_Q r \left(1 + |\ln r|\right)^{\frac{3}{2}} |F|^2 dx),$$

where $r(x)$ is the distance from a point $x \in Q$ to the boundary ∂Q, the constant C does't depend on u_0, f, F.

Литература

1. *Думанян В. Ж.* - ДНАН Армении. 2008. Т. 108. N2. С. 110-116.
2. *Думанян В. Ж.* - ДНАН Армении. 2008. Т. 108. N1. С. 45-49.
3. *Гущин А. К.* - Матем. сб. 1988. Т. 137(179). N1(9). С. 19-64.
4. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* - Матем. сб. 1991. Т. 182. N6. С. 787-810.
5. *Думанян В. Ж.* - Доклады РАН. 2002. Т. 386. N6. С. 735-737.
6. *Dumanyan V. Zh.* - Note Di Matematica. 2002/2003. V. 21. N2. P. 99-118.
7. *Михайлов В. П.* - Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука. 1983. 424 с.