ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Р. В. Даллакян

О нулях функций классов X_λ^∞

(Представлено академиком В.С. Захаряном 19/I 2010)

Ключевые слова: *порядок функции* λ, *классы* X_λ^∞, *неравенство Йенсена, произведения М. М. Джрбашяна*

Пусть D — единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ — множество всех голоморфных в D функций. Предположим, что λ — монотонно растущая, неотрицательная функция на $[1,+\infty)$. С функцией λ свяжем класс

$$X_\lambda^\infty = \left\{ f \in H(D); |f(z)| \leq exp\left[C_f \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right],\ z \in D \right\}.$$

Если $f \in H(D)$, то символ Z_f, как обычно, будет означать множество нулей f в D. Углом Штольца будем называть угол раствора меньше π, с вершиной на окружности, биссектриса которого проходит через центр круга. М.М. Джрбашяном в [1] доказано, что если $\lambda(t) = \ln t$, $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$ и Z_f находится в некотором угле Штольца, то

$$\sum_{\xi \in Z_f} (1-|\xi|) < +\infty. \tag{1}$$

В [2] установлено, что если Z_f не находится в углах Штольца, то для $\lambda(t)$, $\lambda(t) \uparrow +\infty$, $(t \to +\infty)$ существует функция $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$, такая, что ряд (1) расходится. Хейманом и Коренблюмом в [3] доказано, что если

$$J = \int_1^\infty \left(\frac{\lambda(t)}{t^3}\right)^{1/2} dt < +\infty,$$

то для всех f, $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$, нули которого находятся в угле Штольца, условие (1) выполняется. Если же $J = +\infty$, то такое утверждение может и не иметь места. Порядком функции λ будем называть следующий предел: $\alpha_\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\lambda'(x)}{\lambda(x)}$. При $1 < \alpha_\lambda < +\infty$ полная характеристика нулей функций класса X_λ^∞ получена Ф. А. Шамояном в [4]. При $\alpha_\lambda = 1$ и $J = +\infty$ один важный результат (но не полная характеристика нулей класса X_λ^∞) получен в работе [5].

В настоящей работе также исследуются нули функций классов X_λ^∞, когда α_λ конечна. Но сначала доказывается теорема, которая является следствием неравенства Йенсена. Отметим, что здесь α_λ может быть как бесконечным, так и любым положительным числом.

Теорема 1. *Пусть* $k(r) = \lambda\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ *— неотрицательная, монотонно растущая, дважды дифференцируемая функция на* $[0,1)$ *и* $\dfrac{k'(r)}{k(r)}$ *также является монотонно растущей функцией. Тогда, если* $f \in X_k^\infty$, $f \not\equiv 0$, *то*

$$n(r) \le \text{const} \cdot k'(r), \tag{2}$$

где $n(t)$ *— число нулей функции* f *в круге* $|z| \le t$.

Замечание. Когда α_λ конечно и положительно, то (2) можно написать и в следующей форме:

$$n(r) \le \text{const} \cdot \frac{k(r)}{1-r}. \tag{3}$$

При $1 < \alpha_\lambda < +\infty$ такой результат получен и в [4].

Доказательство. Если $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$, то из неравенства Йенсена имеем

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \le \text{const} \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad 0 < r < 1.$$

Отсюда следует верность следующего неравенства:

$$\int_x^{x+\varepsilon} \frac{n(t)}{t} dt \le \text{const} \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-(x+\varepsilon)}\right); \quad 0 < x < x+\varepsilon < 1.$$

А из последнего следует, что

$$n(x) \le \text{const} \cdot \inf_{\varepsilon>0} \frac{\lambda\left(\frac{1}{1-(x+\varepsilon)}\right)}{\varepsilon}.$$

Но так как $\varepsilon > 1 - e^{-\varepsilon}$, то получаем

$$n(x) \le \text{const} \cdot \inf_{\varepsilon>0} \frac{\lambda\left(\frac{1}{1-(x+\varepsilon)}\right)}{\varepsilon}, \quad 0 < x < x+\varepsilon < 1. \tag{4}$$

Пусть $\psi(x) = \ln \lambda \left(\dfrac{1}{1-x} \right)$, тогда (4) примет вид:

$$n(x) \le \text{const} \cdot \inf_{\varepsilon > 0} \frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{1 - e^{-\varepsilon}}, \quad 0 < x < x + \varepsilon < 1. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что написанная в (5) нижняя грань достигается в той точке ε_x, где выполняется следующее равенство:

$$\varepsilon_x = \ln\left(1 + \frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right). \tag{6}$$

Из (5), используя (6), получаем

$$n(x) \le \text{const} \cdot \frac{e^{\psi(x+\varepsilon_x)}}{1 - e^{-\varepsilon_x}}. \tag{7}$$

Но $1 - e^{-\varepsilon_x} = \dfrac{1}{1+\psi'(x+\varepsilon_x)} > \dfrac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}$, следовательно из (7) имеем

$$n(x) \le \text{const} \cdot \psi'(x+\varepsilon_x) \cdot e^{\psi(x+\varepsilon_x)}. \tag{8}$$

Пользуясь (6) и теоремой о среднем, можем написать

$$\begin{aligned} \psi'(x+\varepsilon_x) &= \exp\left[\ln \psi'(x) + \varepsilon_x \cdot \frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}\right] = \\ &= \exp\left[\ln \psi'(x) + \frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)} \ln\left(1 + \frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right)\right] \le \\ &\le \exp\left[\ln \psi'(x) + \frac{\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)}\right], \quad 0 < x < \varepsilon < x + \varepsilon_x < 1. \end{aligned}$$

А это означает, что

$$\psi'(x+\varepsilon_x) \le \text{const} \cdot \psi'(x). \tag{9}$$

Из теоремы о среднем, используя (6), также имеем

$$\begin{aligned} &\exp \psi(x+\varepsilon_x) = (\exp \psi(x)) \cdot \exp(\varepsilon_x \psi'(\xi)) \le \\ &\le (\exp \psi(x)) \cdot \exp\left[\psi'(x+\varepsilon_x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right)\right] = \\ &= e^{\psi(x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\psi'(\xi+\varepsilon_x)}\right)^{\psi'(\xi+\varepsilon_x)} \le \text{const} \cdot e^{\psi(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили

$$\exp \psi(x+\varepsilon_x) \le \text{const} \cdot \exp \psi(x). \tag{10}$$

Из (8), пользуясь (9) и (10), получаем

$$n(x) \le \text{const} \cdot \psi'(x) \cdot e^{\psi(x)}.$$

Откуда, используя вид функции ψ, получаем

$$n(x) \leq \mathrm{const} \cdot \lambda\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \left(\ln \lambda\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)'.$$

Значит, утверждение теоремы верно.

Теорема 2. *Пусть* $k(r) = \lambda(\dfrac{1}{1-r})$, $r \in [0,1)$, *— неотрицательная, монотонно растущая, дважды дифференцируемая функция конечного порядка* α_λ. *Тогда, если* $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$ *и* $\{z_k\}$ *являются нулями этой функции, то для любого* s, $s > 1$, *и для любого натурального числа* m *выполняется следующее условие:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{k(|z_n|) \cdot \prod\limits_{j=0}^{m-1} \ln_j\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) \cdot \left(\ln_m\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right)^s} < +\infty, \tag{11}$$

где $\ln_j x = \ln(\ln_{j-1} x)$, $j \geq 2$, $\ln_0 x = 1$, $\ln_1 x = \ln x$.

И обратно, если для некоторого натурального числа m *и для некоторого числа* s, $s > 1$, *выполняется условие (11), то существуют* f, $f \not\equiv 0$ *из класса* X_λ^∞ *и последовательность* $\{z'_k\}$, *такая, что* $|z'_k| = |z_k|$ *и* $f(z'_k) = 0$.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы заметим, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{k(|z_k|) \cdot \prod\limits_{j=1}^{m-1} \ln_j\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\left(\ln_m\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right)^s} = \\ &= \int\limits_0^1 \frac{1-t}{k(t) \cdot \prod\limits_{j=1}^{m-1} \ln_j\left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\ln_m\left(\frac{1}{1-t}\right)\right)^s} dn(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Интегрируя по частям и пользуясь результатом следствия теоремы 1, нетрудно доказать сходимость последнего интеграла. Откуда и следует, что первая часть теоремы даказана.

Теперь докажем обратное. Пусть для некоторого натурального числа m и для некоторого s, $s > 1$, выполняется условие (11). Тогда из (12) следует, что можем взять $n(t) = \dfrac{k(t)}{1-t}$. М.М. Джрбашяном [1, 6] введено следующее бесконечное произведение:

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot \exp\left[-\frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\right];\ z \in D,$$

причем установлено, что оно равномерно сходится внутри круга D, если имеет место следующее условие:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{13}$$

В этих работах особо отмечено, что при целых α, $\alpha = p$ произведение $\pi_p(z, z_k)$ принимает вид

$$\pi_p(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 - |z_n|^2}{1 - \overline{z}_n z}\right) \cdot \exp\left[\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j+1} \left(\frac{1 - |z_n|^2}{1 - \overline{z}_n z}\right)^{j+1}\right].$$

Как и в [4], введем в рассмотрение следующие прямоугольники:

$$\Delta_{k,l} = \left\{z; 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leq 1 - \frac{1}{2^{k+1}}; \frac{\pi l}{2^k} < \arg z \leq \frac{\pi(l+1)}{2^k}\right\}, \tag{14}$$

$$-2^k \leq l \leq 2^k - 1; \quad h = 1, 2, \ldots$$

В круге $|z| \leq 1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}$ для количества точек z_k будем иметь следующую оценку

$$n\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq 2^{k+1} \cdot \lambda(2^{k+1}). \tag{15}$$

Так как λ — функция конечного порядка,

$$\lambda(2^{k+1}) = \lambda(2 \cdot 2^k) \leq \operatorname{const} \cdot 2^k \cdot \lambda(2^k). \tag{16}$$

Учитывая этот факт, из (15) получаем

$$n\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \operatorname{const} \cdot 2^k \cdot \lambda(2^k).$$

Это означает, что можно выбрать последовательность $\{z'_k\}$ такую, что $|z'_k| = |z_k|$, а аргументы точек z'_k такие, что во всех прямоугольниках (14) количество точек z'_k не превышает $\operatorname{const} \cdot \lambda(2^k)$. Тогда выбранная нами последовательность $\{z'_k\}$ такая, что для некоторого натурального числа m и для некоторого числа s, $s > 1$, имеет место (12) и количество точек z'_k в каждом из прямоугольников $\Delta_{k,l}$ не превосходит $\operatorname{const} \cdot \lambda(2^k)$. Теперь рассмотрим произведение М.М. Джрбашяна, нулями которого являются выбранные нами точки z'_k.

В [4] (с. 416) доказано, что если $0 < \alpha_\lambda < +\infty$ и $\{z'_k\} \subset D$ последовательность точек, число которых в каждом прямоугольнике не превосходит $\operatorname{const} \cdot \lambda(2^k)$, то произведение $\pi_\alpha(z, z_n)$ принадлежит классу X_λ^∞ для всех $\alpha > \alpha_\lambda + 1$.

Таким образом, вторая часть теоремы тоже доказана. Прямым следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $K(r) = \lambda\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ *и* $K_1(r) = \lambda_1\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ — *две неотрицательные, монотонно растущие, дважды дифференцируемые функции конечного порядка на* $[0, 1)$. *Тогда, если* $\lim\limits_{r \to 1} \dfrac{K(r)}{K_1(r)} = +\infty$, *то существует* *функция f, $f \not\equiv 0$, $f \in X_K^\infty$, такая, что каждая функция g, $g \in X_{K_1}^\infty$, имеющая те же нули, что и f, тождественно равна нулю.*

Доказательство. В качестве функции f будем брать построенное нами при доказательстве теоремы 2 произведение М.М. Джрбашяна. Заметим, что мы брали $n(r) = \dfrac{K(r)}{1-r}$. Но из следствия теоремы 1 следует, что ни одна функция g из класса $X_{K_1}^\infty$, за исключением $g \equiv 0$, не может иметь столько нулей в круге $|z| \le r$. Теорема доказана.

Заметим, что когда $m = 1$, теорема 1 принимает довольно простой вид, удобный для применения, так как в этом случае (11) примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|}{K(|z_n|)\cdot \ln^s \frac{1}{1-|z_n|}} < +\infty, \quad s > 1. \tag{17}$$

Пусть, как и в [5],

$$J(r) = \int_0^r \left(\frac{\lambda\left(\frac{1}{1-t}\right)}{1-t} \right)^{1/2} dt, \quad r \in (0,1). \tag{18}$$

Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть $K(r) = \lambda\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$, $r \in [0,1)$, неотрицательная, монотонно растущая, дважды дифференцируемая функция конечного и отличного от нуля порядка. Тогда существует f, $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$, $f(z_k) = 0$, такая, что каждая функция g, $g \in X_\lambda^\infty$, для которой $g(|z_k|) = 0$, тождественно равна нулю.*

Доказательство. При $1 < \alpha_\lambda < +\infty$ такой пример приведен в [4]. Пусть $\alpha_\lambda = 1$ и $J = +\infty$. Нетрудно убедиться, что существует последовательность $\{z_k\}$ такая, что ряд (16) сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|z_k|}{(J(|z_n|))^2 \cdot \prod\limits_{j=0}^{m-1} \ln_j (J(|z_n|)) \cdot (\ln_m J(|z_n|))^a} = +\infty, \quad a > 1.$$

В качестве f возьмем построенное нами при доказательстве теоремы 2 произведение М.М. Джрбашяна. Из результата [5] следует, что любая функция g, $g \in X_\lambda^\infty$, для которой $g(|z_k|) = 0$, тождественно равна нулю.

Теперь пусть $I < +\infty$. Тогда существует последовательность $\{z_k\}$ такая, что ряд (16) сходится, а ряд (1) расходится. Как и выше, в качестве f будем брать произведение М.М. Джрбашяна, построенное в теореме 2. Тогда, если $g \in X_\lambda^\infty$, $g(|z_k|) = 0$, то $g(z) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Государственный инженерный университет Армении

Р. В. Даллакян

О нулях функций классов X_λ^∞

Получена характеристика нулей функций класса X_λ^∞, когда λ является функцией конечного порядка, и как следствие приведена одна теорема единственности для этих классов.

Ռ. Վ. Դալլաքյան

X_λ^∞-դասի զրոների մասին

Տրված է X_λ^∞ դասերի բնութագիրը, որտեղ λ-ն վերջավոր կարգի ֆունկցիա է, եւ որպես հետեւանք բերված է մեկ թեորեմ այդ դասերում միակության մասին:

R. V. Dallakyan

About the Zeros of X_λ^∞ Classes

The characteristic of the zeros of X_λ^∞ classes is given in the word, where λ is a function of bounded order and as a consequence it is given a theorem of the unity for these classes.

Литература

1. *Джрбашян М.М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-55.
2. *Bagemihl F., Erdos P., Seidel W.* - Ann. Sci. Ecole Norm. 1953. Sup. 3. V. 70. P. 135-147.
3. *Hayman W.K., Korenblum B.* - Michigan Math. J. 1980. V. 27. P. 21-304.
4. *Шамоян Ф.А.* - Изв. АН АрмССР. Математика. 1987. Т. 13. N 5-6. С. 405-422.
5. *Даллакян Р. В.* - ДАН АрмССР. 1988. Т. 87. N 3. С. 99-103.
6. *Джрбашян М.М.* - ДАН АрмССР. 1945. Т. 3. N 1. С. 3-9.