ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517

Академик В. С. Захарян, П. А. Матевосян

Класс A_ω^* как локально ограниченное F-пространство

(Представлено 7/XII 2009)

Ключевые слова: *весовые пространства, голоморфные функции, полное пространство, метрика*

Пусть $D-$ единичный круг на комплексной плоскости, T-его граница, $\omega(r)$-монотонная неотрицательная функция из класса $L^1(0;1)$, для которой

$$\sup_{0<r<1}\left|\frac{\omega'(r)\cdot(1-r)}{\omega(r)}\right| = q_\omega < +\infty . \tag{1}$$

При этом будем предполагать, что $0<q_\omega<1$ имеет место, когда $\omega(r)$ монотонно возрастает. Если $\omega(r)$ удовлетворяет условию (1), то его можно представить следующим образом [1]:

$$\omega(r) = \exp\left[-\int_{1-r}^{1}\frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right], \tag{2}$$

где $|\varepsilon(t)|\le c$, c-некоторая постоянная.

Обозначим через A_ω^* класс голоморфных в круге функций $f(z)$, для которых

$$\|f(z)\|_{A_\omega^*} = \int_D \omega(|z|)\log^+|f(z)|dm_2(z) < +\infty . \tag{3}$$

Эти классы при $\omega(r)=\left(1-r^2\right)^{\alpha}(\alpha>-1)$ впервые были введены и подробно изучены в работах М.М. Джрбашяна [2,3] и его учеников [4,5], в которых была установлена каноническая факторизация классов $A_{\alpha}^{*}(\alpha>-1)$, получена полная характеристика нулей классов A_{α}^{*} и окончательная оценка тейлоровских коэффициентов классов A_{ω}^{*}, рассмотрены задачи теории вложения и интерполяционные задачи в пространстве A_{ω}^{*}.

В пространстве аналитических функций A_{ω}^{*} введем метрику, полагая

$$\rho(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)-g\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)\omega(r)rdrd\varphi .$$

Проверим выполнение аксиом метрики. Очевидно, что $\rho(f,g)\geq 0$, причем $\rho(f,g)=0$, лишь если $f(z)=g(z)$, а также $\rho(f,g)=\rho(g,f)$. Аксиома треугольника сразу следует из очевидного неравенства

$$\log^{+}|x|\leq\log(1+x)\leq\log^{+}x+\log 2 \text{ при } x\geq 2 .$$

Из этого следует, что для $f,g,\psi\in A_{\omega}^{*}$ метрика $\rho(f,g)$ конечна и $\rho(f,g)\leq\rho(f,\psi)+\rho(g,\psi)$, т.е.

$$\log(1+|f-g|)\leq\log(1+|f-\psi|)+\log(1+|g-\psi|).$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Класс* A_{ω}^{*} *можно рассматривать как локально ограниченное* F *пространство. Тогда расстояние* $\rho(f,g)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\rho(f,g)=\rho(f-g;0)$;

2) если $\rho(f_n,f)\to 0$, *при* $n\to\infty$, *то* $\rho(\beta f_n,\beta f)\to 0$ *при* $n\to\infty$ *для произвольного комплексного числа* β;

3) если $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность комплексных чисел таких, что* $\beta_n\to\beta$ *при* $n\to\infty$, *то* $\rho(\beta_n f,\beta f)\to 0$ *при* $n\to\infty$ *для произвольного* $f(z)\in A_{\omega}^{*}$;

4) пространство A_ω^* — полное с заданной метрикой.

Предварительно докажем следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k \in A_\omega^*$,

$$f_r(z)=f(rz)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k z^k \quad (0<r<1),$$

тогда

$$\rho(f_r,f)\to 0 \text{ при } r\to 1-0.$$

Доказательство. Имеем

$$\rho(f_r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\varphi}\right)\right|\right)\omega(t)tdtd\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{r_0}\int_{-\pi}^{\pi}\log(1+|f_r-f|)\omega(t)tdtd\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\log(1+|f_r-f|)\omega(t)tdtd\varphi=$$

$$=I_1+I_2 \quad (0<t<1).$$

Когда $(0<t<r_0)$, $0\le rt\le r_0 r<r_0$, функция f_r равномерно сходится к функции f и поэтому

$$I_1<\frac{\varepsilon}{2},\ (\varepsilon>0). \tag{4}$$

Оценим интеграл I_2, учитывая, что

$$\log\left(1+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\varphi}\right)\right|\right)\le \log 2+\log^+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\varphi}\right)\right|,$$

$$\log^+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\varphi}\right)\right|\le 2\log 2+\log^+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)\right|+\log^+\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|.$$

Следовательно,

$$\log\left(1+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)-f\left(te^{i\varphi}\right)\right|\right)\le 3\log 2+\log^+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)\right|+\log^+\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|.$$

Так как функция $u(z)=\log^+|f(z)|$ субгармоническая, то интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}u\left(te^{i\varphi}\right)d\varphi$ монотонно возрастает и

$$\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)\right|d\varphi=\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f\left(rte^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\le$$

$$\leq \int_{r_0}^{1} \omega(t)tdt \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+}\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right| d\varphi < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому для оценки интеграла I_2 имеем

$$I_2 \leq \frac{3\log 2}{2\pi}\int_{r_0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)dtd\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}\left|f_r\left(te^{i\varphi}\right)\right|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \leq$$

$$\leq 3\log 2\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt + \frac{2}{2\pi}\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}\left|f\left(te^{i\varphi}\right)\right|d\varphi \leq$$

$$\leq\left(3\log 2 + \frac{\varepsilon}{3\pi}\right)\int_{r_0}^{1}\omega(t)tdt < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ при } r < r_0 < 1. \qquad (5)$$

Объединяя полученные оценки (4) и (5), приходим к доказательству леммы 1.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает следующее свойство, которое будет нам полезно:

если $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \in A_{\omega}^{*}$ и $S_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$, то $\rho(f,S_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Действительно, во-первых, $\rho(S_n(rz),f_r(z))\to 0$ и $\rho(S_n(z),S_n(rz))\to 0$ при $n\to\infty$ и, во-вторых,

$$\rho(f,S_n)\leq\rho(f,f_r)+\rho(f_r,S_n)\leq\rho(f,f_r)+\rho(f_r,S_n(rz))+\rho(S_n(z),S_n(rz))=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\to 0$$

при $n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k \in A_{\omega}^{*}$ *и* $f_{\zeta}(z)=f(\zeta z)$ *для* $|\zeta|<1$. *Тогда* $\{f_{\zeta}(z)\}$ *является ограниченным множеством в* A_{ω}^{*}.

Доказательство. Для любого η, $\eta>0$, положим $v=\left\{f(z)\in A_{\omega}^{*};\rho(f,0)<\eta\right\}$. Покажем, что $\rho(\beta f_{\zeta},0)<\eta$ при $0<\beta<\beta_0$. Обозначим $f_{(\theta)}(z)=f\left(e^{i\theta}z\right)$, $f_{r(\theta)}(z)=f_r\left(e^{i\theta}z\right)=f\left(re^{i\theta}z\right)$. Допустим, что для достаточно близких к единице r_0 имеет место

$$\rho\left(f_{\theta},f_{r(\theta)}\right)<\eta/2 \text{ при } r_0<r<1.$$

Кроме этого,

$$\rho(\beta' f_\theta, 0) = \rho(\beta' f, 0) < \frac{\eta}{2},$$

$$\rho\left(\beta' f_{r(\theta)}, \beta' f_\theta\right) = \rho(\beta' f_r, \beta' f) \le \rho(f_r, f) < \frac{\eta}{2}.$$

Положим $\zeta = re^{i\theta}$, тогда $f_\zeta(z) = f_{r(\theta)}(z)$ и

$$\rho(\beta' f_\theta, 0) = \rho\left(\beta' f_{r(\theta)}, 0\right) \le \rho\left(\beta' f_{r(\theta)}, \beta' f_\theta\right) + \rho\left(\beta' f_{(\theta)}, 0\right) = \rho(\beta' f_r, \beta' f) + \rho(\beta' f, 0) < \eta$$

при $r_0 \le r < 1$ и $0 < \beta' < 1$.

Если $0 < r < r_0$, то β'' можем выбрать сколь угодно малым и таким, что

$$\rho(\beta'' f_\zeta, 0) = \rho(\beta' f_r, 0) < \eta.$$

Если положим $\beta = \min(\beta', \beta'')$, придем к доказательству леммы 2.

Переходим к доказательству теоремы.

Доказательство. Свойство 1) очевидно. При $|\beta| < 1$ доказательство 2) тоже очевидно. Допустим $|\beta| > 1$. Используя неравенство Бернули

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda \quad (\lambda > 0)$$

имеем

$$\rho(\beta f, \beta f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + |\beta| \cdot |f - f_n|\right)\omega(r) r dr d\varphi \le \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + |f - f_n|\right)^{|\beta|}\omega(r) r dr d\varphi \le$$

$$\le \frac{|\beta|}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + |f - f_n|\right)\omega(r) r dr d\varphi = |\beta| \cdot \rho(f, f_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3) Предположим, что β_n произвольная последовательность комплексных чисел и $\beta_n \to \beta$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\rho(\beta_n f, \beta f) \to 0$ для произвольного $f(z) \in A_\omega^*$.

Имеем $\rho(\beta_n f, \beta f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^1 \log\left(1 + |\beta_n - \beta| \cdot |f|\right)\omega(r) r dr d\varphi \le$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \log\left(1 + |f|\right)^{|\beta_n - \beta|}\omega(r) r dr d\varphi \le \frac{|\beta_n - \beta|}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \log\left(1 + |f|\right)\omega(r) r dr d\varphi =$$

$$= |\beta_n - \beta|\rho(f, 0) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

4) Покажем, что пространство A_ω^* — полное, это означает, что каждая фундаментальная последовательность стремится к функции $f(z)$, которая принадлежит классу A_ω^*. Пусть $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность из класса A_ω^* и пусть $\rho(f_n, f_m) \to 0$ при $n,m \to \infty$. Тогда для фиксированного m_0 имеем

$$\rho(f_n, 0) \le \rho(f_n, f_{m_0}) + \rho(f_{m_0}, 0) = C_0 .$$

Таким образом, $\rho(f_n, 0) < C_0$, значит, для последовательности $\{f_n(z)\}_1^\infty$ имеет место соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_n\left(re^{i\varphi}\right)\right|\omega(r)rdrd\varphi \le C_0, \quad n = 1,2,3,... \tag{6}$$

Покажем, что последовательность $\{f_n(z)\}_1^\infty$ в круге $|z|<1$ равномерно сходится к аналитической функции $f(z)$, которая также принадлежит классу A_ω^*.

Из (6) с учетом результатов [5] следует, что последовательность равномерно сходится внутри круга $|z|<1$ и поэтому ее предельная функция будет аналитической в круге. Докажем, что $\rho(f_n, f) \to 0$ при $n \to \infty$ и $f \in A_\omega^*$. Из последовательности $\{f_n(z)\}_1^\infty$ выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^\infty$ так, чтобы $f_{n_k} \to f(z)$ при $k \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших k имеем

$$\rho(f, f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1 + |f - f_n|\right)\omega(r)rdrd\varphi \le$$
$$\le \varliminf_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(1 + \left|f_{n_k} - f_n\right|\right)\omega(r)rdrd\varphi + \rho\left(f, f_{n_k}\right) \le$$
$$\le \rho\left(f_{n_k}, f_n\right) + \varepsilon .$$

Таким образом, для достаточно больших n_k и n из $\rho(f_n, f_m) \to 0$ при $n,m \to \infty$, следует, что $\rho(f, f_n) \to 0$ при $n \to +\infty$. Покажем, что $f \in A_\omega^*$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\log^+\left|f_{n_k}\left(re^{i\varphi}\right)\right|\omega(r)rdrd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi .$$

Так как $\rho(f_{n_k}, f) \to 0$ в круге $|z| < 1$, то последовательность $\{f_{n_k}\}$ равномерно сходится к функции $f(z)$ при $0 < r < r_0$. Поэтому для достаточно больших k имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| \omega(r) r dr d\varphi + \varepsilon . \tag{7}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} - f \right| \omega(r) r dr d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| \omega(r) r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log 2 \omega(r) r dr d\varphi \le$$

$$\le \rho(f_{n_k}, f) + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| \omega(r) r dr d\varphi + C \log 2 \cdot \varepsilon \le$$

$$\le (1 + C \log 2) \cdot \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \int_{r_0}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| \omega(r) r dr d\varphi . \tag{8}$$

Объединяя полученные оценки (7) и (8), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f| \omega(r) r dr d\varphi + (2 + C \log) \cdot \varepsilon . \tag{9}$$

Так как $f_{n_k} \in A_\omega^*$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f_{n_k} \right| \omega(r) r dr d\varphi \le C ,$$

где $C > 0$ некоторая постоянная. Если $k \to \infty$, то из (9) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{1} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| \omega(r) r dr d\varphi \le C_1 .$$

Следовательно, $f(z) \in A_\omega^*$. Теорема полностью доказана.

Государственный инженерный университет Армении

Академик В. С. Захарян, П. А. Матевосян

Класс A_ω^* как локально ограниченное F-пространство

Исследуются некоторые свойства голоморфных в круге функций в весовом пространстве A_ω^*. Доказано, что класс A_ω^* является локально ограниченным F-пространством.

Ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Պ. Ա. Մաթևոսյան

A_ω^* դասը որպես լոկալ սահմանափակ F տարածություն

Աշխատանքը նվիրված է հոլոմորֆ ֆունկցիաների A_ω^* կշռային տարածությունների որոշ հատկությունների ուսումնասիրությանը: Ապացուցվում է, որ A_ω^* դասը լոկալ սահմանափակ F տարածություն է:

Academician V. S. Zakaryan, P. A. Matevosyan

Class A_ω^* as Local Limited F-Space

Some qualities of holomorphic functions in the A_ω^* weighted space are studied. It is proved that class A_ω^* represents itself local limited F-space.

Литература

1. *Шамоян Ф. А.* - Изв.АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. N5-6. С. 405-422.

2. *Джрбашян М. М.* -ДАН Арм ССР. 1945. Т. 3. N1. С. 3-9.

3. *Джрбашян М. М.* - Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм ССР. 1948. Вып. 2. С. 3-55.

4. *Джрбашян М. М., Захарян В. С.* — Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. Наука, Москва. 1993.

5. *Захарян В. С., Матевосян П.А.* Вестник-76. ГИУА. Сборник научных и методических статей. Ереван. 2009. Т. 1. С. 3-7.