ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 110 2010 № 1

МАТЕМАТИКА

УДК 519.24

Э. А. Даниелян, А. Г. Оганесян

Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров распределений умеренного роста

(Представлено академиком В.С.Захаряном 22/X 2009)

Ключевые слова: *распределения умеренного роста, оценки максимального правдоподобия, асимптотические свойства оценок*

Распределения *умеренного роста* получены в [1] из стационарных распределений стандартного процесса гибели и размножения. Они представляют собой двухпараметрическое распределение дискретной случайной величины (СВ) ξ вида

$$p_x(\alpha) = (g(\alpha))^{-1} \cdot \frac{\theta^x}{\psi_x} \prod_{m=0}^{x-1} \left(1 + \frac{c-1}{\psi_m}\right), \quad x = 1, 2, \dots , \tag{1}$$

$$p_0(\alpha) = (g(\alpha))^{-1} = \left(1 + \sum_{k \ge 1} \frac{\theta^k}{\psi_k} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 + \frac{c-1}{\psi_m}\right)\right)^{-1}, \tag{2}$$

$$\alpha = (c, \theta),\ \{0 < c \le C_0 < +\infty, 0 < \theta_0 < \theta \le 1\} \stackrel{def}{=} A_0,$$

где последовательность $\{\varphi_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условиям *умеренного роста:*

$$\begin{cases} \psi_0 = 1, \{\psi_k\}_0^\infty \textit{ возрастает, } \lim\limits_{k\to+\infty} \psi_k = +\infty,\ \lim\limits_{k\to+\infty} (\psi_{k+1}/\psi_k) = 1, \\ S_\psi^0 = \sum\limits_{k\ge 0} \frac{1}{\psi_k} < +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

В [2] изучены *оценки максимального правдоподобия* (ОМП) неизвестного параметра $\alpha \in A_0$ на основе случайной выборки $\mathbf{X}^n = (X_1, X_2, \dots , X_n)$

из распределения (1)-(2) при дополнительном предположении сходимости следующих рядов

$$S_\psi^j = \sum_{k\geq 0} \frac{k^j}{\psi_k} < +\infty,\ j = 1, 2. \tag{4}$$

Именно, обозначим

$$\overline{h}_i(\mathbf{x}^n) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} h_i(x_m),\ h_i(x_m) = \sum_{k=0}^{x_m-1} (\psi_k + c - 1)^i,\ i = 1, 2,$$

где $h_i(0) = 0$, а $\mathbf{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — реализация выборки $\mathbf{X}^n$. Тогда ОМП параметра α модели (1)-(3) (*при условии ее существования*) удовлетворяют системе уравнений правдоподобия

$$\{M_\alpha \xi = \overline{x}^n,\ M_\alpha h_1(\xi) = \overline{h}_1(x^n). \tag{5}$$

Здесь M — знак математического ожидания, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

В [3] установлено, что система (5) (*при допустимых значениях* $\overline{x}$ и $\overline{h}_1(x^n)$) имеет единственное решение $\hat{\alpha}_n = (\hat{c}_n, \hat{\theta}_n)$, которое согласно [2] является ОМП параметра α.

Более того, в [3] показано, что при $0 < \theta < 1$ ряды (4) сходятся.

Цель настоящей работы заключается в изучении *асимптотических* при $n \to +\infty$ свойств ОМП $\hat{\alpha}_n$ неизвестного параметра $\alpha \in A_0$.

Оценку $\hat{\alpha}_n$ параметра α называют *сильно-состоятельной* для α, если $\hat{\alpha}_n \to \alpha$ P-почти наверное (P-п. н.) при $n \to +\infty$.

Теорема 1. *ОМП $\hat{\alpha}_n$ параметра $\alpha \in A_0$ модели (1)-(3) является сильно-состоятельной оценкой для α.*

Для установления теоремы 1 обозначим

$$\{m_1(\alpha) = M_\alpha \xi,\ m_{h_1}(\alpha) = M_\alpha h_1(\xi).$$

Тогда система (5) запишется в виде

$$\mathbf{m}(\alpha) = \overline{\mathbf{m}}_n, \tag{5$'$}$$

где $\overline{m}_1(\mathbf{x}^n) = \overline{x}$, $\overline{m}_2(\mathbf{x}^n) = \overline{h}_1(\mathbf{x}^n)$. Так что ОМП параметра α, являясь *единственным* решением системы (5′), запишется в виде

$$\hat{\alpha}_n = \mathbf{m}^{-1}(\overline{\mathbf{m}}_n),\ \mathbf{m}_n = (\overline{m}_1, \overline{m}_2),$$

где $\mathbf{m}^{-1}(\cdot)$ — обратное (непрерывное) отображение для $\mathbf{m}(a) : A_0 \to \mathbf{m}(A_0) \subset R^2$.

По усиленному закону больших чисел Колмогорова, при $n \to +\infty$ имеет место P-п. н. сходимость

$$\begin{cases} \overline{m}_1(\mathbf{x}^n) = \overline{x} \to m_1(\alpha) = M_\alpha \xi, \\ \overline{m}_2(\mathbf{x}^n) = \overline{h}_1(\mathbf{x}^n) \to m_{h_1}(\alpha) = M_\alpha h_1(\xi). \end{cases}$$

Отсюда в силу непрерывности отображения $\mathbf{m}^{-1}(\cdot)$ по теореме непрерывности (см., напр. [4]),

$$\hat{\alpha}_n \to \alpha \quad P\text{-п. н. при } n \to +\infty.$$

Обозначим через

$$I(\alpha) = (I_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^2, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \ \alpha_1 = c, \ \alpha_2 = \theta$$

фишеровскую информационную матрицу одного наблюдения X_1, т.е.

$$I_{i,j}(\alpha) = M_\alpha \left(\frac{\partial l_\alpha(X_1)}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{\partial l_\alpha(X_1)}{\partial \alpha_j} \right) = -M_\alpha \left(\frac{\partial^2 l_\alpha(X_1)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right),$$

где $l_\alpha(X_1) = \ln p_{X_1}(\alpha)$.

Пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — двумерный случайный вектор, имеющий нормальное распределение $N(0, I(\alpha)^{-1})$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $I(\alpha)^{-1}$,

$$\mathbf{u}_n = (u_n^1, u_n^2) = \sqrt{n} \cdot (\hat{\alpha}_n - \alpha) = (\sqrt{n} \cdot (\hat{c}_n - c), \sqrt{n} \cdot (\hat{\theta}_n - \theta)).$$

Оценку $\hat{\alpha}_n$ называют *асимптотически эффективной* для параметра α, если

$$\mathbf{u}_n \xrightarrow{d} \mathbf{u}, \ n \to +\infty,$$

где d — знак сходимости по распределению.

Теорема 2. *1. ОМП $\hat{\alpha}_n$ параметра α асимптотически эффективна.*

2. Имеет место сходимость моментов

$$M_\alpha (u_n^i)^k \to M_\alpha (u^i)^k, \ k \geq 1, \ i = 1, 2 \ \textit{при} \ n \to +\infty.$$

Отсюда, в частности, следует, что при $n \to +\infty$

$$M_\alpha \cdot \hat{c}_n = c + o(n^{-1/2}) \text{ и } M_\alpha \hat{\theta}_n = \theta + o(n^{-1/2}),$$

т.е. оценки $\hat{c}_n$ и $\hat{\theta}_n$ являются *асимптотически несмещенными* для параметров c и θ, соответственно.

В математической статистике известна общая теорема для ОМП с утверждением теоремы 2 (см. [4]), для справедливости которой должны быть выполнены следующие *условия регулярности* (RR):

1^0) $p_x(\alpha') \neq p_x(\alpha'')$ при $\alpha' \neq \alpha''$ и $x = 0, 1, 2, \dots$;
2^0) $A_0 \subset R^2$ есть *компактное* подмножество R^2;
3^0) $T = \{x : p_x(\alpha) > 0\}$ не зависит от $\alpha \in A_0$;
4^0) функция $l_\alpha(x)$ для $x \in T$ *дважды непрерывно дифференцируема по* α и существует функция $K(x)$ такая, что

$$\left|\frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\right| \leq K(x) \text{ при всех } \alpha \in A_0,\ i, j = 1, 2,$$

причем

$$M_\alpha K(\xi) < +\infty,\ \lim_{k\to+\infty} \sup_{\alpha\in A_0} \int\limits_{|K(x)|>k} K(x) p_x(\alpha) dx = 0;$$

5^0) $I(\alpha)$ *непрерывна* и $detI(\alpha) = |I(\alpha)| \neq 0$.

Доказательство теоремы 2 заключается в проверке справедливости условий регулярности RR, которая осуществляется в приложении.

Приложение. Условия 1^0 и 2^0 очевидны. Условие 3^0 выполнено, поскольку $T = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Проверим условие 4^0. Выражения для производных первого порядка функции $l_\alpha(x)$ имеют следующий вид (см. [2])

$$\frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta^2} M_\alpha\xi + \frac{x}{\theta},\ \frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial c} = -M_\alpha h_1(\xi) + h_1(x).$$

Запишем представления для частных производных второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta^2} = \dfrac{1}{\theta^2}(M_\alpha\xi - D_\alpha\xi - \overline{x}),\ \dfrac{\partial l_\alpha(x)}{\partial\theta} = -\dfrac{1}{\theta^2} cov_\alpha(\xi, h_1(\xi)), \\ \dfrac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial c^2} = M_\alpha h_2(\xi) - D_\alpha h_1(\xi) - h_2(x). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь D — знак дисперсии, cov — знак ковариации двух СВ.

Все выражения в правых частях формул (6) существуют и являются непрерывными функциями по $\alpha \in A_0$ (см. [2], лемма).

Покажем, что существует функция $K(x)$, не зависящая от α и удовлетворяющая неравенствам в условии 4^0.

Согласно лемме из [2], для любого $\alpha \in A_0$ имеем

$$\left|\frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial\theta^2}\right| \leq \theta_0^{-2} \cdot (M_\alpha\xi + M_\alpha\xi^2 + x) \leq \theta_0^{-2}(S_\psi^1 + S_\psi^2 + x) \leq \theta_0^{-2}(2S_\psi^2 + x).$$

Далее, так как $h_1(x) \leq (x|c)$, то

$$\left|\frac{\partial l_\alpha(x)}{\partial\theta\partial c}\right| \leq \theta_0^{-1} \cdot (M_\alpha(\xi \cdot h_1(\xi)) + M_\alpha\xi \cdot M_\alpha h_1(\xi) \leq (\theta_0 c)^{-1}(M_\alpha\xi^2 + (M_\alpha\xi)^2) \leq \frac{2}{c_0\theta_0} \cdot S_\psi^2.$$

Наконец, из очевидного неравенства $h_2(x) \leq (x/c_0^2)$ следует

$$\left|\frac{\partial^2 l_\alpha(x)}{\partial c^2}\right| \leq c_0^{-2} \cdot (M_\alpha\xi + M_\alpha\xi^2 + x) \leq c_0^{-2}(2S_\psi^2 + x).$$

Рассмотрим функцию $K(x) = K_0 + x$, где $K_0 = S_\psi^2 \cdot \max(c_0^{-2}, \theta_0^{-2}, (c_0\theta_0)^{-1})$. Очевидно, что для данного $K(x)$ выполнено первое неравенство в условии 4^0. Кроме того,

$$M_\alpha K(\xi) = K_0 + M_\alpha \xi \leq K_0 + S_\psi^1 < +\infty.$$

Проверим теперь предельное соотношение в условии 4^0.

Действительно, рассмотрим события $\{K(\xi) \geq k_0\}$, где $k_0 > 0$ — целое число, и их индикаторы $I_{K(\xi)\geq k_0}$. Обозначая $k_0' = k_0 - K_0$, имеем

$$M_\alpha(K(\xi) I_{K(\xi)\geq k_0}) = M_\alpha((K_0 + \xi) I_{\xi \geq k_0 - K_0}) \leq K_0 + M_\alpha I_{\xi \geq k_0'}.$$

С другой стороны, из неравенства

$$M_\alpha(\xi \cdot I_{\xi \geq k_0}) \leq \sum_{n \geq k_0'} \frac{1}{\psi_n}$$

выводим

$$\lim_{k_0' \to +\infty} \sup_{\alpha \in A_0} M_\alpha(\xi \cdot I_{\xi \geq k_0}) = 0.$$

Таким образом, условие 4^0 полностью проверено.

Перейдем к условию 5^0. Произведем выкладки

$$I_{1,1}(\alpha) = -M_\alpha \left(\frac{\partial^2 l_\alpha(X_1)}{\partial c^2} \right) = D_\alpha h_1(X_1),$$

$$I_{1,2}(\alpha) = I_{2,1}(\alpha) = -M_\alpha \left(\frac{\partial^2 l_\alpha(X_1)}{\partial c \partial \theta} \right) = \theta^{-1} \cdot cov_\alpha(X_1, h_1(X_1)),$$

$$I_{2,2}(\alpha) = -M_\alpha \left(\frac{\partial^2 l_\alpha(X_1)}{\partial \theta^2} \right) = \theta^{-2} \cdot D_\alpha X_1.$$

Теперь подсчитаем определитель

$$|I(\alpha)| = \theta^{-2}(D_\alpha X_1 \cdot D_\alpha h_1(X_1) - cov_\alpha^2(X_1, h_1(X_1))) > 0.$$

Так как $I(\alpha)$ непрерывна по $\alpha \in A_0$ и $|I(\alpha)| \neq 0$, то выполнено условие 5^0.

Ереванский государственный университет

Э. А. Даниелян, А. Г. Оганесян

Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров распределений умеренного роста

Для распределений умеренного роста изучены асимптотические свойства при неограниченном росте объема выборки оценки максимального правдоподобия неизвестного двумерного параметра. Доказаны асимптотическая несмещенность, сильная состоятельность, эффективность оценок, сходимость их моментов.

Է. Ա. Դանիելյան, Հ. Գ. Հովհաննիսյան

Չափավոր աճով բաշխումների պարամետրերի մաքսիմալ ճշմարտանմանության գնահատականների ասիմպտոտիկ հատկություններ

Ընտրվածքի ծավալի անսահմանափակ աճի պայմաններում ուսումնասիրված են չափավոր աճի բաշխումների անհայտ երկչափ պարամետրի մաքսիմալ ճշմարտանմանության գնահատականների ասիմպտոտիկական հատկությունները: Ապացուցված են գնահատականների ասիմպտոտիկ անշեղելիությունը, խիստ ունակայնությունը, արդյունավետությունը, մոմենտների զուգամետությունը:

E. A. Danielyan, H. G. Hovhannisyan

Asymptotic Properties of Maximal Likelihood Estimators for Parameters of Distributions of Moderate Growth

The asymptotic properties of Maximal Likelihood Estimators for unknown two-dimensional parameter of distributions of moderate growth are investigated. The asymptotic unbiaseness, strong consistency, effectivity and moments' convergence of estimators are proved under the non-limited increase of the sample size condition.

Литература

1. *Astola F., Danielian E.* - Facta Universitatis(Nis). 2006. V.19. P. 109-131.
2. *Гаспарян К. В., Даниелян Э. А.* - Вестн. РАУ, серия "физ.-мат. и естественные науки". 2006. N 2. C. 7-14.
3. *Варданян Х. Л, Оганесян А. Г.* - Ереван. Вестн. ГИУА. 2009. N 2. C. 60-70.
4. *Боровков А. А.* - Математическая статистика. М. Наука. 1984. 472 с.