

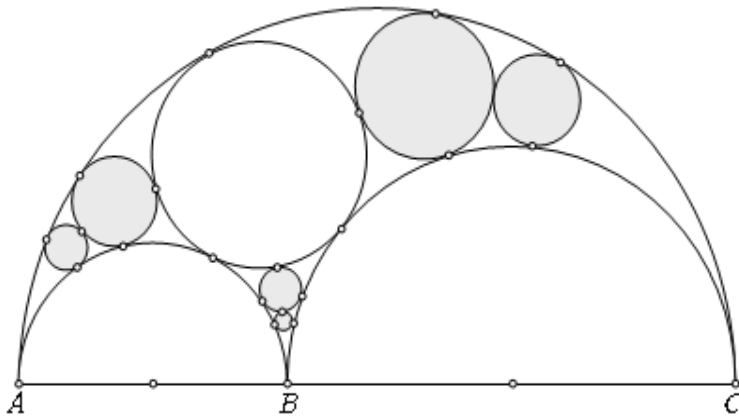


$w_{i+1}$  շրջանագծերը, ինչպես նաև Արբելյոսը սահմանափակող երկու աղեղները, ապա սրացված շրջանագծերի հաջորդականությունը կանվանենք Պապի շրթա: Նկատենք, որ կամայական Արբելյոսի համար կարելի է կառուցել երեք փարբեր Պապի շրթաներ (տես նկ.2): Նշանակենք  $A, B$  և  $C$  կետերին ձգվող Պապի շրթաները համապատասխանաբար  $\Omega_A, \Omega_B$  և  $\Omega_C$  սինվոլներով: Նշենք, որ, ըստ էության, Պապի թեորեմը վերաբերվում է միայն  $\Omega_A$  և  $\Omega_B$  շրթաներին, և համաձայն այդ շրթաների  $n$ -րդ ( $n = 1, 2, \dots$ ) շրջանագծերի համար [4]-ում և [6]-ում սրացված բանաձևերի, փեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$R_n^A = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 r^2 + R \cdot (R - r)}; \quad (1)$$

$$R_n^B = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 (R - r)^2 + R \cdot r} : \quad (2)$$

Սույն աշխատանքում ստանում ենք (1), (2) բանաձևերի նմանակը  $\Omega_C$  շրթայի  $n$ -րդ  $n = 1, 2, \dots$  շրջանագծի  $R_n^C$  շառավղի համար՝ օգտվելով Դեկարտի թեորեմից և կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:



Նկ. 2:

2. Դեկարտի թեորեմը: Դիտարկենք միմյանց վեց փարբեր կետերում փոխադարձաբար շոշափող  $B_1, B_2, B_3, B_4$  չորս շրջանագծեր, որոնցից ցանկացած երեքը չունեն ընդհանուր շոշափող: Շրջանագծերի նման դասավորությունը կոչվում է Դեկարտի կոնֆիգուրացիա, որի բոլոր հնարավոր եղանակները բերված են նկար 3-ում: Այսպես հնարավոր ենք համարում այն կոնկրետ դեպքերը, երբ որոշ շրջանագծեր ուղիղներ են: Նշանակենք  $B_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) շրջանագծի շառավիղը  $r_i$ -ով, իսկ դրանց համապատասխան կորությունները (շրջանագծի շառավղի հակադարձ մեծությունը կոչվում է շրջանագծի կորություն)՝  $\beta_i = 1/r_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ : Ենթադրվում է, որ ուղիղն ունի անվերջ շառավիղ, հետևաբար դրա կորությունը գրո է:

Դեկարտի կոնֆիգուրացիաներում շրջանագծերի շառավիղների միջև առնչությունների բացահայտումը հնագույն խնդիրներից է: Օրինակ, Արքիմեդը Արբելյոսն

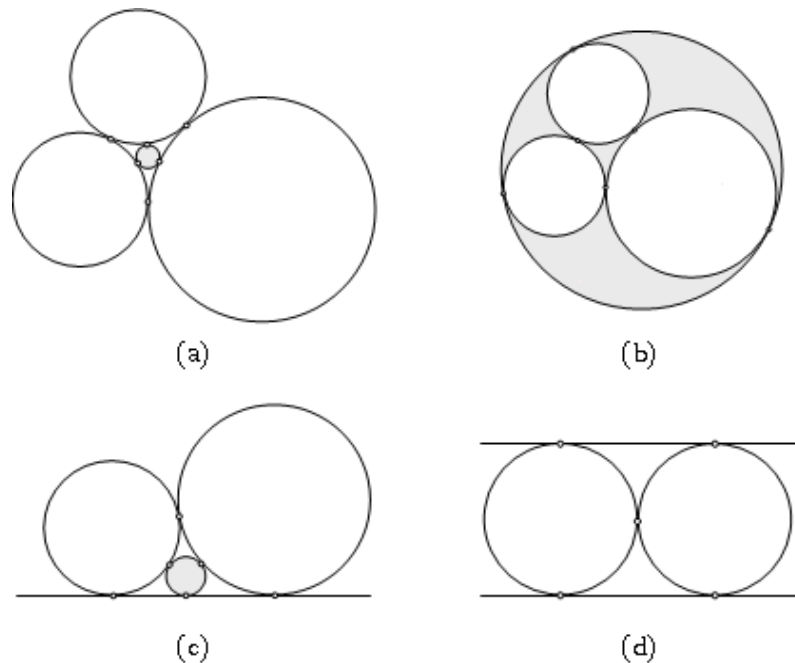
ուսումնասիրելիս սրացել է որոշ առնչություններ (c) փիպի կոնֆիգուրացիայի մի քանի մասնավոր դեպքերում [7]:

1643թ. Ռ. Դեկարտը նշում է մի առնչություն չորս շառավիղների միջև, որի բովանդակությունը, շրջանագծերի կորությունների փոխհարաբերակցությունը, արտահայտված է հետևյալ թեորեմում:

Թեորեմ (Դեկարտ): Դեկարտի կոնֆիգուրացիայում միմյանց փոխադարձաբար շոշափող շրջանագծերի կորությունները բավարարում են հետևյալ առնչությանը՝

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 \beta_i \right)^2 : \quad (3)$$

Դեկարտը դիտարկում էր միայն (a) փիպի կոնֆիգուրացիան, սակայն նրա թեորեմը կիրառելի է բոլոր՝ (a)-(d) փիպերի կոնֆիգուրացիաների դեպքում, եթե միայն շրջանագծերի կորությունների համար սահմանենք որոշակի նշաններ հետևյալ կերպ. եթե կոնֆիգուրացիային մասնակցող  $B_i$  շառավիղով շրջանագիծը մյուսների հետ ունի միայն արտաքին շոշափում, ապա դրա կորությունը կընդունենք հավասար  $1/r_i$ , եւ  $-1/r_i$ , եթե այն մյուսների հետ ունի միայն ներքին շոշափում:

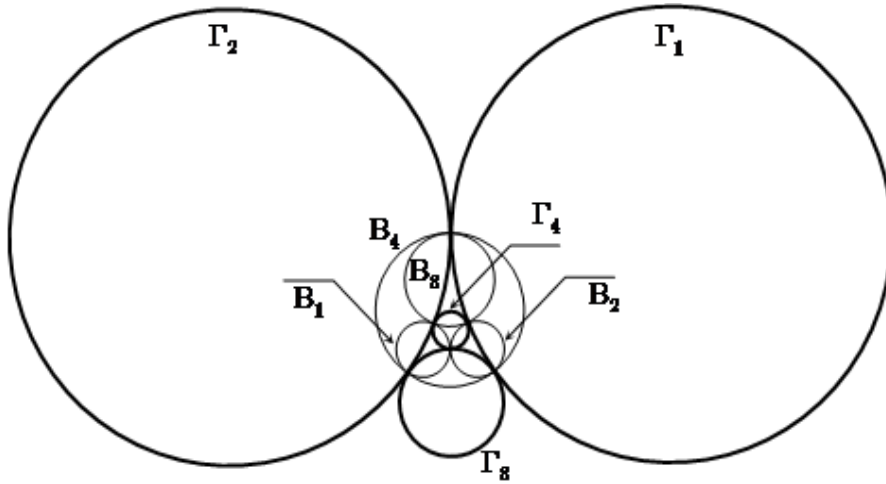


Նկ. 3:

Մաթեմատիկական գրականության մեջ հաճախ են հանդիպում Դեկարտի թեորեմի ամենաարարքեր ապացույցներ, որոնցից մի քանիսին կարելի է ծանոթանալ, օրինակ, [8,9] աշխատանքներում: Սակայն, սույն աշխատանքում բերում ենք այս թեորեմի այնպիսի ապացույց, որի ընթացքում ավելի բացահայտ է դառնում Դեկարտի կոնֆիգուրացիաների խորհրդավորությունը:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ  $B_i$ ,  $i = \overline{1,4}$  շրջանագծերը որոշում են  $\Gamma_i$  չորս շրջանագծերի մեկ այլ կոնֆիգուրացիա, որոնք միմյանց փոխադարձաբար շոշափում են

մինչև վեց կետերում (տես նկ. 4): Ընդ որում  $\Gamma_1$ -ն անցնում է  $B_2, B_3, B_4$  շրջանագծերի շոշափումների երեք կետերով,  $\Gamma_2$ -ն՝  $B_1, B_3, B_4$  շրջանագծերի շոշափումների երեք կետերով և այլն: Նշանակենք  $\Gamma_i$  շրջանագծի կորությունը  $\gamma_i$ -ով:

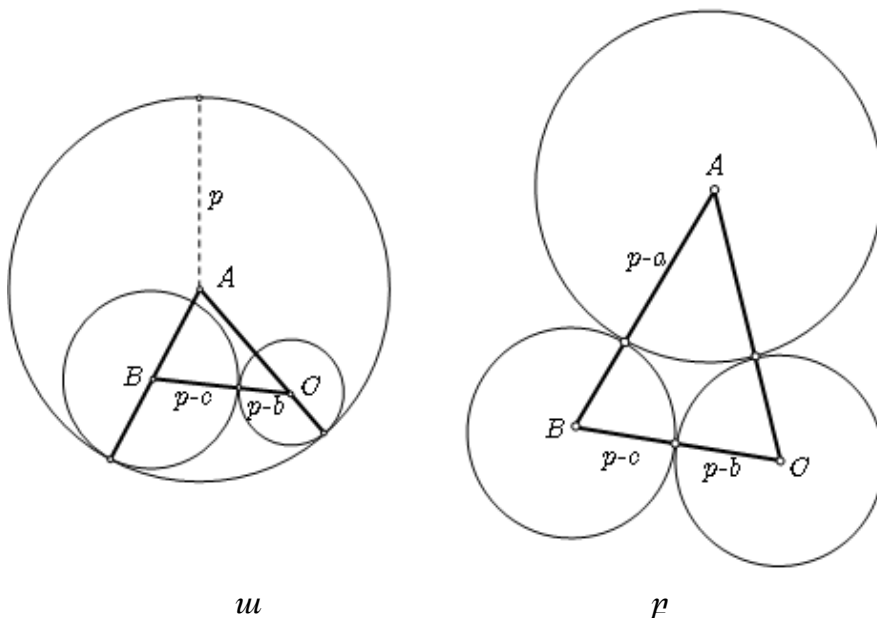


Նկ. 4:

Դժվար չէ նկատել, որ եթե  $B_1, B_2, B_3$  շրջանագծերի կենտրոնները կազմում են  $ABC$  եռանկյունը, ապա  $\Gamma_4$ -ը այդ եռանկյան կամ ներգծյալ, կամ առգծյալ շրջանագիծն է: Մասնավորապես, եթե  $B_1, B_2, B_3$ -ն ունեն նկար 5,ա-ում բերված դասավորությունը, ապա  $\Gamma_4$ -ը կլինի  $ABC$  եռանկյան ներգծյալ շրջանագիծը: Այս դեպքի համար կունենանք՝

$$\beta_1 = \frac{1}{p-a} : \beta_2 = \frac{1}{p-b} : \beta_3 = \frac{1}{p-c}, \gamma_4 = \mp \frac{1}{r},$$

Որտեղ  $a, b, c$ -ն  $ABC$  եռանկյան համապատասխանաբար  $A, B, C$  գագաթների դիմացի կողմերն են,  $p$ -ն՝ կիսապարագիծը, իսկ  $r$ -ը՝  $ABC$  եռանկյան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը:



Նկ. 5:

Այժմ, եթե  $B_1, B_2, B_3$  շրջանագծերն ունեն նկար 5,բ-ում պատկերված դասավորությունը, ապա  $\Gamma_4$ -ը կլինի  $ABC$  եռանկյան առգծյալ շրջանագիծ եւ կունենանք՝

$$\beta_1 = -\frac{1}{p}; \beta_2 = +\frac{1}{p-b}; \beta_3 = \frac{1}{p-c}; \gamma_4 = \pm\frac{1}{r_a},$$

որտեղ  $r_a$ -ն  $ABC$  եռանկյան  $A$  գագաթին հանդիպակաց առգծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

Կիրառելով ներգծյալ եւ առգծյալ շրջանագծերի շառավիղների համար

$$r^2 = \left(\frac{S}{p}\right)^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \text{ եւ } r_a^2 = \left(\frac{S}{p-a}\right)^2 = \frac{p \cdot (p-c)(p-b)}{p-a}$$

հայտնի բանաձեւերը՝ վերոհիշյալ երկու դեպքերում էլ ստանում ենք հետևյալ առնչությունը՝

$$\beta_1 \cdot \beta_2 + \beta_1 \cdot \beta_3 + \beta_2 \cdot \beta_3 = \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3}\right) \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 = \gamma_4^2 : \quad (4)$$

Նանգունորեն կարելի է ցույց տալ, որ

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_3 + \gamma_2 \cdot \gamma_3 = \beta_4^2 : \quad (5)$$

Պարզ է, որ (4) եւ (5) առնչություններում 1,2,3,4 ինդեքսների տեղափոխությունը կրկին կրերի հավասարության, ուստի

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^4 \beta_i\right)^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + 2\beta_1\beta_2 + 2\beta_1\beta_3 + \\ &+ 2\beta_1\beta_4 + 2\beta_2\beta_3 + 2\beta_2\beta_4 + 2\beta_3\beta_4 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 : \end{aligned} \quad (6)$$

Քանի որ վերջին հավասարության աջակողմյան մասը սիմետրիկ է  $\beta_i$ -ի եւ  $\gamma_i$ -ի նկատմամբ, ապա կարող ենք պնդել, որ այն հավասար է նաեւ  $\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i\right)^2$ , այսինքն՝

$$\left(\sum_{i=1}^4 \gamma_i\right)^2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 : \quad (7)$$

Նավասարություններ (6)-ից եւ (7)-ից անմիջապես ստանում ենք

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 > 0$$

առնչությունը: Այժմ կարարելով ձևափոխությունների հետևյալ շղթան՝

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4) \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 - \beta_4^2 = \\ &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 - \beta_4^2 + 2\gamma_4^2 = \\ &= (\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + (\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4) - \\ &\quad - (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3) + 2\gamma_4^2 = \\ &= 2(\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_4 + \gamma_3\gamma_4) + 2\gamma_4^2 = 2\gamma_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \end{aligned}$$

կարանանք

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 = 2\gamma_4, \quad (8)$$

որտեղից 1,2,3,4 ինդեքսների փոփոխության շնորհիվ կարանանք 4 նմանապիպ առնչություններ, որոնց երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի եւ գումարելով դրանց համապատասխան կողմերը, կարանանք՝

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^2 = \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 :$$

Նկարի ունենալով այս առնչությունը՝ (6)-ից անմիջապես ստանում ենք թեորեմի ապացույցը.

$$\left(\sum_{i=1}^4 \beta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \gamma_i^2 = 2 \sum_{i=1}^4 \beta_i^2 :$$

3. Նամաձայն 1-ում կարարված նշանակումների փոփոխության ունի հետևյալը:

Թեորեմ: Արբելուսին ներգծած Պասալի շրջանագծերի  $\Omega_c$  շրջայի  $n$ -րդ շրջանագծի  $R_n^c$  շառավղի համար՝

$$R_n^c = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{n^2 R^2 - r \cdot (R - r)} : \quad (9)$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար օգտվենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:  $n = 1$  դեպքում ունենք

$$R_1^c = \frac{R \cdot r \cdot (R - r)}{R^2 - r \cdot (R - r)}, \quad (10)$$

հետևաբար այս դեպքում պնդումը ճիշտ է, քանի որ Պասալի շրջայի առաջին շրջանագիծը հենց Արբելուսին ներգծած շրջանագիծն է, որի շառավղի համար փոփոխության ունի (10) բանաձևը (փնս, օրինակ, [6]):

Այժմ ենթադրենք, որ (9) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած  $k \leq n$  բնական թվի համար եւ ցույց տանք, որ այն ճիշտ է նաև  $(n + 1)$ -ի համար: Նկատենք, որ Պասալի  $\Omega_c$  շրջայի  $w_n, w_{n+1}$  շրջանագծերը Արբելուսի  $w_{AC}$  եւ  $w_{CB}$  շրջանագծերի հետ մեկտեղ կազմում են Դեկարտի կոնֆիգուրացիա, հետևաբար, կիրառելով Դեկարտի թեորեմը, կարանանք՝

$$2(\beta_n^2 + \beta_{n+1}^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2) = (\beta_n + \beta_{n+1} + \beta_{AC} + \beta_{CB})^2 \quad (11)$$

որտեղ  $\beta_4, \beta_{n+1}, \beta_{AC}, \beta_{CB}$  մեծությունները  $w_n w_{n+1}, w_{AC}, w_{CB}$  շրջանագծերի կորություններն են:

Ակնհայտ է, որ (11)-ը կարելի է գրել հետևյալ փոխարկով՝

$$\beta_{n+1}^2 - 2\beta_{n+1}(\beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB}) + \beta_n^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2 - 2(\beta_n \beta_{AC} + \beta_{AC} \beta_{CB} + \beta_n \beta_{CB}) = 0 :$$

Լուծելով այս քառակուսի հավասարումը՝ կարանանք.

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB} + 2\sqrt{\beta_n \beta_{AC} + \beta_{AC} \beta_{CB} + \beta_n \beta_{CB}} :$$

Վերջին հավասարության մեջ փոխադրելով  $\beta_{AC} = \frac{1}{r}$ ,  $\beta_{BC} = \frac{1}{R-r}$  և  $\beta_n = \frac{R \cdot r(R-r)}{n^2 R^2 - r \cdot (R-r)}$ ՝ կունենանք՝

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R-r} + \\ &+ 2\sqrt{\frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r^2(R-r)} + \frac{1}{r(R-r)} + \frac{n^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)^2}} = \\ &= \frac{n^2 R^2 + R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} + \frac{2nR}{r(R-r)} = \frac{(n+1)^2 R^2 - r(R-r)}{R \cdot r(R-r)} : \end{aligned}$$

Ներկայացնում

$$R_{(n+1)}^c = \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{R \cdot r(R-r)}{(n+1)2R^2 - r(R-r)} :$$

Այս առնչությունից բխում է, որ (9) պնդումը ճիշտ է նաև  $(n+1)$ -ի համար, ուստի այն ճիշտ է ցանկացած  $n \geq 1$  ամբողջ թվի համար:

Նայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարան

**Ավադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան, Ա. Ն. Առաքելյան**

**Արբելոսին ներգծած Պապի շրջանագծերի հաջորդականության վերաբերյալ**

Դիտարկվում է Արբելոսին ներգծած Պապի շրջանագծերից եւս մեկ հաջորդականություն: Այդ հաջորդականության  $n$ -րդ շրջանագծի շառավղի համար սրացվում են որոշ առնչություններ արտահայտված Արբելոսին ներգծած շրջանագծի շառավղի միջոցով:

**Академик В. С. Захарян, А. Г. Аракелян**

**О последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос**

Рассматривается еще одна последовательность окружностей Паппа, вписанных в Арбелос. С помощью теоремы Декарта о конфигурации четырех окружностей получаем соотношение для радиуса  $n$ -й окружности данной последовательности в терминах радиуса вписанной окружности Арбелоса.

Academician V. S. Zakaryan, A. H. Arakelyan

### On Pappus Chains Inside Arbelos

Another infinite chain of Pappus circles inscribed inside the Arbelos is considered. By means of Descartes' theorem the identity involving the radius of  $n$ -th circle of the chain and the incircle radius is obtained.

### ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Dodge C.W., Schoch T., Woo P.Y., Yiu P.* - Math. Mag. 1999. V. 72. P. 202-213.
2. *Power F.* - Forum Geom. 2005. V. 5. P. 133-134.
3. *Woo P.Y.* - Forum Geom. 2001. V. 1. P. 133-136.
4. *Bankoff L.* - In: The Lighter Side of Mathematics. ed. R.K. Guy and R.E. Woodrow, Mathematical Association of America. 1994. P. 247-253.
5. *Ջարիրյան Վ., Ամիրխյան Ա.* - Բնագիր. 2003, N5-6. էջ 61-68:
6. *Ջարիրյան Վ., Ամիրխյան Ա.* - Բնագիր. 2003, N3-4. էջ 43-48:
7. *Архимед.* Соч. Гос. изд. ФМ. литературы. М. 1962. 637 с.
8. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. М. 1998.
9. *Coxeter H. S. M.* Introduction to Geometry, Second Edition. New York. John Wiley and Sons. 1969.