

УДК 517.51

Р. А. Багиян

Об оценке последовательных производных целой функции
конечного роста

(Представлено академиком В. С. Захаряном 6/IV 2009)

Ключевые слова: функция типа Миттаг-Леффлера, обобщённое неравенство С. Н. Бернштейна, целые функции произвольного роста

Как известно [1], целая функция типа Миттаг-Леффлера определяется посредством разложения

$$E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})} \quad (\rho > 0, -\infty < \mu < +\infty).$$

В [2] получены следующие неравенства для последовательных производных этой функции:

$$|E_{\rho}^{(n)}(-z, \mu)| \leq \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})}, \quad \operatorname{Re} z \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

которые достижимы в точке $z = 0$.

Целью данной работы является получение аналогичных неравенств для произвольной целой функции конечного роста.

В [3] автором установлено следующее интегральное представление для любой целой функции $F(z)$ роста (ρ, σ) ($1 < \rho < +\infty$, $0 < \sigma < +\infty$) во всей комплексной плоскости:

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(zt) \Phi_{\rho, \mu}(t) dt \quad (-\infty < \mu < +\infty), \quad (1)$$

где $f(z)$ — целая функция порядка 1 и типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ — подробно исследованная в [2] функция.

В [3] введён класс B_σ^ρ — целых функций роста (ρ, σ)

$$(1 \leq \rho < 2, 0 < \sigma < +\infty),$$

ограниченных в объединении угловых областей

$$\left\{ \varphi, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2\beta} \right\} \cup \left\{ \varphi, |\varphi - \pi| \leq \frac{\pi}{2\beta} \right\}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho} = 1.$$

Установлена теорема, согласно которой если $F(z) \in B_\sigma^\rho$, то фигурирующая в (1) функция $f(z)$ принадлежит бернштейновскому классу $B_{\sigma^{1/\rho}}$. Класс Бернштейна $B_{\sigma^{1/\rho}}$ — это класс целых функций экспоненциального типа, ограниченных на действительной оси. Более того, было установлено, что функция $f(z)$ принадлежит более узкому классу $W_{\sigma^{1/\rho}}^2$, т.е. классу функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом на действительной оси. Из представления (1) имеем

$$F^{(n)}(z) = \int_0^\infty f^{(n)}(zt) t^n \Phi_{\rho,\mu}(t) dt$$

и при $z = x$, $-\infty < x < +\infty$,

$$F^{(n)}(x) = \int_0^\infty f^{(n)}(xt) t^n \Phi_{\rho,\mu}(t) dt.$$

Отсюда с использованием классических неравенств С.Н. Бернштейна и теоремы 5 из [3] получим

$$\|F^{(n)}(x)\|_\infty \leq \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \|f^{(n)}(x)\|_\infty \leq \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \|f(x)\|_\infty, \quad (2)$$

где $\|f(x)\|_\infty$ sup-норма.

Но известно [4] следующее неравенство:

$$\max |f(x) = \|f(x)\|_\infty \leq \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2, \quad (3)$$

где $\|f(x)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Далее в интегральном представлении (1), которое верно для любого z , положим в частности

$$z = \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2\lambda}\right) y, \quad y \in (0, +\infty), \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

$$F(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}y}) = \int_0^{\infty} f(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}yt})\Phi_{\rho,\mu}(t)dt.$$

После очевидной замены $u = e^{i\frac{\pi}{2\lambda}yt}$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}y}}F\left(\frac{1}{e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\Phi_{\rho,\mu}(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}yu})du. \quad (4)$$

Интегральное представление (4) рассмотрено в [6], где введена функция

$$K(s, \theta) = e^{-i\theta s} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\mu + \frac{s-1}{\rho})}, \quad \rho > 1, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

и установлено, что функция $\frac{K(s, \theta)}{1-s}$ двойственна по Меллину с функцией

$$\frac{1}{x} \int_0^x \Phi_{\rho,\mu}(te^{i\theta})dt, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2\lambda}.$$

При $\theta = 0$ получим функцию $K(s)$, рассмотренную автором в [5] в связи с обращением интегрального представления (1) с привлечением операторов бесконечного порядка; установлен также аналогичный результат о двойственности по Меллину.

В [6] получена формула обращения для интегрального представления (4), а также некоторые неравенства. Используя эти неравенства для значений параметров

$$\rho > 1, \quad \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho},$$

будем иметь

$$\int_0^{+\infty} |g^{\pm}(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy$$

и

$$\int_x^{+\infty} |f(y)|^2 dy \leq 4\pi \left\{ \int_0^{+\infty} |g^{(+)}(x)|^2 dx + \int_0^{+\infty} |g^{(-)}(x)|^2 dx \right\}.$$

Таким образом, получим, что

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \leq 2 \left\{ \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y} F\left(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}\right) \right|^2 dy + \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y} F\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}}{y}\right) \right|^2 dy \right\}$$

или

$$\|f(x)\|_2 \leq \sqrt{2} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{y} F\left(\frac{1}{y} e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) \right|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{y} F\left(\frac{1}{y} e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) \right|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если в интегралах правой части сделать замену $\frac{1}{y} = z$, то после очевидных сокращений получим

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_2 &\leq \sqrt{2} \left\{ \left[\int_0^{+\infty} |F(ze^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})|^2 dz \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^{+\infty} |F(ze^{i\frac{\pi}{2\lambda}})|^2 dz \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= \sqrt{2} [\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2 + \|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2]. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в неравенства (2), (3), окончательно получим

$$\begin{aligned} \|F^{(n)}(x)\|_\infty &\leq \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} [\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2 + \|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если $F(z) \in B_\sigma^\rho$ ($1 < \rho < 2$, $0 < \sigma < +\infty$), то при $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ имеют место неравенства (5) для последовательных производных целой функции конечного роста.

Доказанная теорема позволяет оценить последовательные производные целой функции конечного роста со значениями норм этой функции в классе $L_2(0, +\infty)$ на лучах $x \exp(\pm i\frac{\pi}{2\lambda})$.

Государственный инженерный университет Армении

Р. А. Багиян

Об оценке последовательных производных целой функции конечного роста

Для последовательных производных функций типа Миттаг-Леффлера автором и М.М.Джрбашяном получены точные неравенства. В данной работе обобщается этот результат, а именно доказывается следующая

Теорема. Если $F(z) \in B_\sigma^\rho$ ($1 < \rho < 2$, $0 < \sigma < +\infty$), то для значений параметров $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|F^{(n)}(x)\|_\infty &\leq \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} [\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2 + \|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2]. \end{aligned}$$

Բ. Ա. Բաղիյան

Վերջավոր աճով ամբողջ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների գնահատման մասին

Ներկայացվում է Մ.Մ. Զրբաշյանի կողմից Միտագ-Լեֆլերի ամբողջ ֆունկցիայի հաջորդական ածանցյալների համար ստացվել էին ճշգրիտ անհավասարություններ: Աշխատանքում ընդհանրացվում է այդ արդյունքը կամայական ամբողջ ֆունկցիայի համար, այսինքն ապացուցվում է հետևյալը

Թեորեմ. Եթե $F(z) \in B_\sigma^\rho$ ($1 < \rho < 2$, $0 < \sigma < +\infty$), ապա $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ արժեքների համար տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\begin{aligned} \|F^{(n)}(x)\|_\infty &\leq \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} [\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2 + \|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2]. \end{aligned}$$

R. A. Baghiyan

On Estimates of Successive Derivatives of any Entire Function of Finite Growth

The following inequalities for successive derivatives of Mittag-Leffler type function were obtained by the author and M.M.Djrbashian. The result is generalised in this paper. It is proved the following

Theorem. Let $F(z) \in B_\sigma^\rho$ ($1 < \rho < 2$, $0 < \sigma < +\infty$), then for $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\rho} = 1$ take place the following estimates

$$\begin{aligned} \|F^{(n)}(x)\|_\infty &\leq \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \|f(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}} \sigma^{\frac{n}{\rho}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\mu + \frac{n}{\rho})} [\|F(xe^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2 + \|F(xe^{i\frac{\pi}{2\lambda}})\|_2]. \end{aligned}$$

Литература

1. Զրբաշյան Մ.Մ. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. Наука. 1966.
2. Զրբաշյան Մ.Մ., Բաղիյան Բ.Ա. - ԴԱՆ ՍՍՏՐ. 1975. Թ. 223. Ո 6; Իզվ. ԱՆ ԱրմՍՏՐ. Մաթեմատիկա. 1975. Թ. 10. Ո 6.
3. Բաղիյան Բ.Ա. - Իզվ. ԱՆ ԱրմՍՏՐ. Մաթեմատիկա. 1980. Թ. 15. Ո3.
4. Իբրաղիմով Ի.Ի. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку. Изд-во АН АзССР. 1962. 316 с.
5. Բաղիյան Բ.Ա. - ԴԱՆ ԱրմՍՏՐ. 1981. Թ. 73. Ո4.
6. Այոպյան Ս.Ա. - Իզվ. ՆԱՆ Արմենի. Մաթեմատիկա. 2004. Թ. 39. Ո6.