ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. М. Хачатрян

Особенности учета геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде

(Представлено 23/III 2009)

Ключевые слова: *электроупругая волна, геометрическая нелинейность, конечные удлинения и сдвиги, пьезоэлектрический слой*

При нынешнем уровне развития точного приборостроения результаты исследований на уровне линейной теории электромагнитоупругости [1, 2 и др.] часто бывают неудовлетворительными, поскольку не всегда выявляют точную качественную картину или дают неточную количественную оценку физического явления. В таких случаях возникает необходимость учета в задачах связанных электромагнитоупругих полей разных расчетных уточняющих моделей.

Учет физической и геометрической нелинейностей в задачах связанных полей [3-5 и др.] приводит к усложнению расчетных схем, но позволяет выявить некоторые качественные изменения и в связи с этим точные количественные оценки волнового процесса при распространении индуцированного сигнала.

1. Исследуется процесс распространения электроупругого волнового сигнала конечной амплитуды в пьезоэлектрическом слое $|x_1| < \infty$, $0 < x_2 < h$, $|x_3| < \infty$ из пьезоэлектрика класса 6mm гексогональной симметрии, при котором генерируются электромагнитоупругие высшие гармоники.

Уравнения движения электроупругой среды и уравнения электромагнетостатики в лагранжевой системе координат (x_1, x_2, x_3) имеют вид:

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2},\ i, j = 1, 2, 3. \tag{1.1}$$

$L_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ — тензор термодинамических напряжений, ρ_0 — естественная плотность среды,

$$\frac{\partial D_m}{\partial x_m} = 0;\ \frac{\partial B_n}{\partial x_n} = 0,\ m, n = 1, 2, 3. \tag{1.2}$$

С учетом только геометрической нелинейности термодинамические напряжения L_{ij} и индукции электрического и магнитного полей D_m и B_n, соответственно, представляются в виде [3, 4]:

$$L_{ij} = c_{ijmk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{mij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \delta_{wj}e_{mik}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_w}{\partial x_k} + \left(\delta_{jm}c_{inkl} + \frac{1}{2}\delta_{km}c_{ijnl}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}; \tag{1.3}$$

$$D_m = e_{mij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{mk}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}e_{mnj}\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{mk}l_{knij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \tag{1.4}$$

$$B_p = -\left(\mu_{kp}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn}\frac{\partial u_p}{\partial x_n} - \mu_{pl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{kp}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \tag{1.5}$$

где u_k — компоненты упругого перемещения, потенциалы $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_k, t)$ электрического и магнитного полей, соответственно, введены через лагранжевы напряженности $E_k(x_j, t)$ электрического и $H_k(x_j, t)$ магнитного полей с учетом градиента деформации $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$

$$E_m(x_k, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n},\ H_m(x_k, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_m} - l_{mnij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial \Psi}{\partial x_n}. \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.4) и (1.6) l_{ijmp} — тензор "геометрической стрикции"

$$l_{mnij} = \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{ij}\delta_{mn}.$$

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ или $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_n^{(0)}}{\partial x_n} = 0;\ \frac{\partial B_p^{(0)}}{\partial x_p} = 0,\ n, p = 1, 2, 3, \tag{1.7}$$

где индукции электрического $D_n^{(0)}(x_i, t)$ и магнитного $B_n^{(0)}(x_i, t)$ полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(0)}(x_i, t)$ и $\Psi^{(0)}(x_i, t)$, соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(0)}(x_i, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ или $u_k^{(0)}(x_i, t) = u_k(x_1, h, x_3, t)$ для вакуумных полупространств $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ и $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$, соответственно [3]:

$$\begin{aligned} D_p^{(0)} &= -\varepsilon_0\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p}\right); \\ B_p^{(0)} &= -\mu_0\left(\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p}\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Естественно, что учет конечных деформаций поверхности электроупругой среды наглядно искажает ("деформирует") нематериальную внешнюю область, чем и продиктованы выражения материальных уравнений нематериальной среды (1.8). Учет "деформаций свободных поверхностей" особенно важен для внешней вакуумной области, где индуцируется связанное с электроупругой волной электромагнитное волновое поле.

На границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Phi - \Phi^{(0)} = 0, \;\; \Psi - \Psi^{(0)} = 0 \tag{1.9}$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$\begin{gathered}
e_{2ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{2k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}{}_{\frac{1}{2}}\,\delta_{ik}e_{2nj}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon_{2k}l_{knij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\
= -\varepsilon_0\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2}\right);
\end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered}
-\left(\mu_{k2}\frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn}\frac{\partial u_2}{\partial x_n} - \mu_{2l}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{k2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \\
= -\mu_0\left(\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_m}\right)\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2}\right).
\end{gathered}$$

На первоначально недеформированных границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ термодинамические напряжения L_{21}, L_{22} и L_{23} должны равняться нулю:

$$\begin{gathered}
c_{6mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{m6}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = -\delta_{w1}e_{m2k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{1m}c_{2nkl} + \frac{1}{2}\delta_{km}c_{6nl}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}; \\
c_{2mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{m2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = -\delta_{w2}e_{m2k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{2m}c_{2nkl} + \frac{1}{2}\delta_{km}c_{2nl}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}; \\
c_{4mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + e_{m4}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m} = -\delta_{w3}e_{m2k}\frac{\partial \Phi}{\partial x_m}\frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{3m}c_{2nkl} + \frac{1}{2}\delta_{km}c_{4nl}\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Очевидно, что учет "деформирования" внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней нематериальной среды (1.8) и граничных условий (1.9) - (1.11).

2. Анализ вышеприведенных основных соотношений показывает, что посредством градиента деформации $\xi_{i,j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$ связываются не только плоскодеформированное и антиплоскодеформированное упругие поля, но и квазистатические электрическое и магнитное поля внутри материального слоя и во внешней нематериальной области.

Естественно, что при изучении характера распространения излученной в пьезоэлектрическую среду волны наряду с граничными условиями на поверхностях пьезослоя $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ должны удовлетворяться также условия затухания по глубине вакуумных полупространств (при $x_2 \to \pm\infty$, соответственно) всех индуцированных волновых составляющих.

Исследования только влияния геометрической нелинейности (конечные деформации) на волновой процесс в задачах электромагнетоупругости очень важны, тем более что оно не только связывает электроупругое и магнитное поля, но и при излучении волнового сигнала может привести к разным генерациям в зависимости от характера излучаемого сигнала.

Известно, что в рамках линейной теории электроупругости при разных симметриях пьезоэлектрических кристаллов упругие плоское $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t)$, $U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0\}$ и антиплоское $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ поля разделяются [5], тем самым допуская возможность излучения волнового сигнала разного характера.

При этом известно, что в пьезокристалле класса 6mm по срезу изотропной плоскости x_1ox_2 может распространяться чисто упругая волна плоской деформации $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ или электроупругая волна антиплоской деформации $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$.

Понятно, что в зависимости от того, какого рода волновой сигнал мы возбуждаем (плоскую упругую или антиплоскую электроупругую волну), основную роль при распространении волны, а также при генерации следующих гармоник будут играть конечные удлинения или конечные сдвиги.

Это вызывает интерес к исследованию особенностей распространения разных волновых сигналов с учетом разного рода геометрических нелинейностей:

а) распространение антиплоского электроупругого сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ при учете конечных сдвигов типа $\partial U_\alpha/\partial x_\beta$ $(\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2, 3)$;

б) распространение антиплоского электроупругого сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ при учете конечных удлинений типа $\partial U_\alpha/\partial x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$;

в) распространение плоского упругого сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ при учете конечных сдвигов типа $\partial U_\alpha/\partial x_\beta$ $(\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = 1, 2, 3)$;

г) распространение плоского упругого сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ при учете конечных удлинений типа $\partial U_\alpha/\partial x_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$.

При учете только конечных сдвиговых деформаций (случаи задач а) и в)) в основных уравнениях и материальных соотношениях сохраняем только нелинейности типа $(\partial U_\alpha/\partial x_\beta) \cdot (\partial U_\gamma/\partial x_\mu)$, ($\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \mu$, $\alpha, \gamma = 1, 2, 3$, $\beta, \mu = 1, 2$), обусловленные конечными сдвигами.

Тогда основные уравнения в пьезоэлектрическом слое $0 \leq x_2 \leq h$ (плоскость x_1ox_2 перпендикулярна к оси анизотропии кристалла ox_3) будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=\\
&-c_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\\
&-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}-c_{11}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 x_2}+c_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\\
&-c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1\partial x_2}-c_{11}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}+e_{15}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}+e_{15}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}=\\
&=-c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-e_{15}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\partial x_2}-e_{15}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\partial x_2},\\
&e_{15}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+e_{15}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}=\\
&=\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+2\varepsilon_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\partial x_2}+2\varepsilon_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1\partial x_2},\\
&\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}+2\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}+2\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1\partial x_2}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Во внешней вакуумной среде $x_2 < 0$ или $x_2 > h$ лагранжевы уравнения электромагнетизма в "деформированной" нематериальной среде примут довольно упрощенный вид по сравнению со случаем полного учета геометрической нелинейности:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 U_2^{(0)}}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2}+2\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2},\\
&\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 U_2^{(0)}}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2}+2\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1\partial x_2}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Граничные условия (1.9)-(1.11), соответственно, преобразуются к виду:

$$
\Phi-\Phi^{(0)}=0,\quad \Psi-\Psi^{(0)}=0,
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}-e_{15}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\varepsilon_0\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2}=-\varepsilon_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}-\varepsilon_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}-\varepsilon_0\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_1},\\
&-\mu_{11}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}+\mu_0\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2}=-\mu_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}-\mu_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}+\mu_0\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_1},\\
&\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\frac{\partial U_3}{\partial x_2},
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$c_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+c_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}c_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial U_1}{\partial x_2}-\frac{1}{2}c_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-$$
$$-\frac{1}{2}c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\frac{1}{2}c_{12}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\frac{\partial U_3}{\partial x_1},$$
$$c_{44}\frac{\partial U_3}{\partial x_2}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}-\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\frac{\partial U_3}{\partial x_1}.$$

Очевидно, что здесь можно исследовать как распространение антиплоского электроупругого волнового сигнала $\{0,0,U_\gamma(x_\alpha,x_\beta,0,t),\Phi(x_\alpha,x_\beta,0,t)\}$, так и распространение плоского упругого волнового сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha,x_\beta,0,t),U_\beta(x_\alpha,$ $x_\beta,0,t),0,0\}$.

При учете только конечных удлинений (случаи задач б) и г)) в основных уравнениях и материальных соотношениях сохраняем только нелинейности типа $(\partial U_\alpha/\partial x_\alpha)\cdot(\partial U_\beta/\partial x_\beta)$, $(\alpha;\beta=1,2)$, обусловленные конечными удлинениями.

В этом случае уравнения электромагнетостатики для электроупругого слоя запишутся в виде:

$$c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}=-3c_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}-c_{12}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2},$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1\partial x_2}+c_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}=\\=-c_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}-3c_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2},\\ c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}+e_{15}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+c_{44}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}+e_{15}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}-\rho\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}=\\=-e_{15}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}-e_{15}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}-e_{15}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}-e_{15}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2},\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$e_{15}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+e_{15}\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}=\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+\varepsilon_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}-$$
$$-\varepsilon_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}+\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}+\varepsilon_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}-\varepsilon_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}-\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2},$$

а уравнения электромагнетостатики для внешней нематериальной среды запишутся в виде:

$$\begin{gathered}-\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2}=-\frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2},\\ -\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2}=-\frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial x_1^2}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_1}-\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2}.\end{gathered}\tag{2.5}$$

Соответствующие граничные условия на обеих свободных от механических нагрузок поверхностях слоя преобразуются к виду:

$$\Phi - \Phi^{(0)} = 0, \quad \Psi - \Psi^{(0)} = 0,$$

$$e_{15}\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \varepsilon_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \varepsilon_0\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} = -\varepsilon_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varepsilon_0\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} + \varepsilon_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2},$$

$$-\mu_{11}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \mu_0\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} = \mu_{11}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \mu_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \mu_0\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = 0, \tag{2.6}$$

$$c_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}c_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1} - c_{12}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \frac{3}{2}c_{11}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2},$$

$$c_{44}\frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0.$$

Очевидно, что здесь также можно исследовать как распространение антиплоского электроупругого волнового сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$, так и распространение плоского упругого волнового сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$.

Из соотношений (2.1) -(2.6) видно, что во всех задачах левые нелинейные части связывают плоское и антиплоское поля деформации и при возбуждении либо сигнала плоской упругой деформации, либо сигнала антиплоской электроактивной деформации могут быть генерированы высшие гармоники обоих типов волн в связке друг с другом.

Институт механики НАН РА

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. М. Хачатрян

Особенности учета геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде

Исследуется распространение электроупругого волнового сигнала конечной амплитуды в пьезоэлектрическом слое из пьезоэлектрика класса 6mm гексогональной симметрии, при котором генерируются электромагнитоупругие высшие гармоники.

Получены основные уравнения электромагнитоупругости, граничные условия и материальные соотношения исследуемой задачи.

Показано, что в зависимости от того, какого рода волновой сигнал мы возбуждаем (плоскую упругую или антиплоскую электроупругую волну), основную

роль при распространении волны, а также при генерации следующих гармоник будут играть конечные удлинения или конечные сдвиги.

Из выведенных основных соотношений видно, что во всех задачах левые нелинейные части связывают плоское и антиплоское поля деформации и при возбуждении либо сигнала плоской упругой деформации, либо сигнала антиплоской электроактивной деформации могут быть генерированы высшие гармоники обоих типов волн в связке друг с другом.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան

Երկրաչափական ոչ գծայնության հաշվառման առանձնահատկությունները պիեզոէլեկտրական միջավայրում վերջավոր լայնույթով էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածման դեպքում

Հետազոտվել է հեքսոգոնալ համաչափության 6mm դասի պիեզոբյուրեղային շերտում վերջավոր լայնույթով էլեկտրաառաձգական ազդանշանի տարածումը, որի պարագայում գեներացվում են դրա բարձր հարմոնիկաները:

Ստացված են հետազոտվող խնդրի էլեկտրամագնիսաառաձգականության հավասարումները, նյութական առնչությունները եւ եզրային պայմանները:

Ցույց են տրված տարբեր տեսակի երկրաչափական ոչ գծայնությունների (վերջավոր երկարացումներ կամ վերջավոր սահքեր) հաշվառման դեպքում ալիքային ազդանշանի տարածման տարբեր առանձնահատկությունների հնարավորությունը, ինչպես նաեւ, որ, կախված գրգռված ալիքային ազդանշանի տեսակից (հարթ առաձգական կամ հակահարթ էլեկտրաառաձգական), ալիքի տարածման, ինչպես նաեւ հաջորդ հարմոնիկաների գրգռման հարցում հիմնական դերակատարում կարող են ունենալ վերջավոր երկարացումները կամ վերջավոր սահքերը:

Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan, V. M. Khachatryan

Features of Finite Amplitude Electroelastic Waves Propagation in the Piezoelectric Medium Taking into Account Geometrical Nonlinearity

The propagation of finite amplitude electroelastic wave signal in the piezoelectric medium from piezoelectric material of 6mm class of hexagonal symmetry is investigated under which the higher electromagnetoelastic harmonics are generated.

The basic equations of electromagnetoelasticity, boundary conditions and material relations of the investigated problem are obtained.

It is shown that depending on what type of wave we disturb (plane elastic or antiplane electroelastic wave), during the wave propagation, as well as during the generation of next harmonics the main role belongs to the finite elongations or finite shears.

From derived main correlations it is obvious that in all problems left nonlinear parts connected plane and antiplane deformation fields and during the disturbance both plane elastic deformation signal and antiplane electroeactive deformation signal can be generated higher harmonics of both waves related with each other.

Литература

1. *Белакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982.
2. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. Наука. 1988.
3. *Аветисян А.С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. N4. С. 41-51.
4. *Maugin G.A.* Nonlinear electromechanical effects and application. World Sci. Publ. Songapore. 1985.
5. *Аветисян А.С.* - Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. N1. С. 12-19.