ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек

(Представлено 12/I 2009)

Ключевые слова: *общая двумерная динамическая теория, микрополярные оболочки*

Введение. Одним из актуальных вопросов несимметричной теории упругости является построение прикладных теорий тонких балок, пластин и оболочек [1-6 и др.].

В работах [7-9] на основе асимптотического анализа двумерной и трехмерной граничных задач, в зависимости от значений физических безразмерных параметров материала, построены общие одномерные и двумерные статические и динамические модели упругих тонких микрополярных балок и пластин и общих двумерных статических теорий микрополярных тонких оболочек.

В данной работе построены общие динамические теории упругих микрополярных оболочек.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Тензорные уравнения динамической задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ НППВ) имеют вид [10]:

уравнения движения

$$\nabla_m\sigma^{mn} = \rho\frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2}, \quad \nabla_m\mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = J\frac{\partial^2\omega^n}{\partial t^2}; \tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn}+(\mu-\alpha)\gamma_{nm}+\lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \quad \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm}+\beta\kappa_{kk}\delta_{nm}; \tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \quad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n. \tag{1.3}$$

Здесь σ^{nm}, μ^{nm} — контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} — ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; u_n — ковариантные компоненты вектора перемещения, ω_n — ковариантные компоненты вектора независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические константы микрополярного материала оболочки, ρ — плотность материала, J — мера инерции при вращении. Индексы m, n, k здесь и в дальнейшем принимают значения 1,2,3.

Отнесем оболочку к триортогональной системе координат α_n, принятой в теории оболочек [11], и перейдем к физическим компонентам для указанных тензоров и векторов, но обозначения оставим прежними.

К определяющим уравнениям НТУ НППВ (1.1)-(1.3) присоединим соответствующие граничные и начальные условия.

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ НППВ, которые можно записать так:

$$\sigma_{3n} = \mp q_n^{\pm}, \quad \mu_{3n} = \mp m_n^{\pm} \text{ при } \alpha_3 = \pm h. \tag{1.4}$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи НТУ НППВ:

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \ \mu_{mn} n_m = m_n^* \text{ на } \Sigma_1, \ V_n = V_n^*, \ \omega_n = \omega_n^* \text{ на } \Sigma_2. \tag{1.5}$$

При помощи начальных условий, при $t = 0$, задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$\begin{gathered} V_n|_{t=0} = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \ \frac{\partial V_n}{\partial t}|_{t=0} = F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \omega_n|_{t=0} = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \ \frac{\partial \omega_n}{\partial t}|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $f_n, F_n, \varphi_n, \Phi_n$ — заданные функции в области трехмерной оболочки.

2. Преобразование уравнений НТУ НППВ. Асимптотический метод. Для удобства введем τ_{mn} — несимметричный тензор силовых напряжений [12] и ν_{mn} — аналогичный тензор для моментных напряжений [10].

Рассмотрим задачу сведения трехмерной динамической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий [11-13]. Отметим, что указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, который представляет двумерную задачу.

Для этой цели в трехмерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости (2.2), (2.3) перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат α_n и времени t):

$$\alpha_i = R\lambda^{-p}\xi_i,\ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta,\ t = \lambda^{\omega}\frac{h}{c_0}\tau. \tag{2.1}$$

Здесь величина ω характеризует изменяемость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени, величина p/l характеризует изменяемость НДС по координатам; p, l — целые числа, $l > p \geq 0$; λ — большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$.

При определении НДС оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2},\ \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2},\ \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2},\ \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2}, \tag{2.2}$$

где R — характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки; c_0 — некоторая характерная скорость (например, скорость продольных возмущений в длинном упругом стержне по классической теории упругости).

Цель статьи — следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи, приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения (1.1)-(1.3) к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ).

Обращаясь к изучению краевых микрополярных упругих явлений, будем снова отправляться от уравнений трехмерной динамической теории НТУ НППВ (1.1)-(1.3). Будем считать, что поверхность края оболочки Σ, вблизи которого необходимо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных (координат и времени) по формулам:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1,\ \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2,\ \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta,\ t = \lambda^{\omega}\frac{h}{c_0}\tau, \tag{2.3}$$

где величины R, λ, l, p, ω имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение пограничной задачи должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$:

$$\sigma_{3n} = 0,\ \mu_{3m} = 0. \tag{2.4}$$

Пограничный слой вводится для того, чтобы на основе сращивания внутренней задачи и погранслоя было возможно удовлетворять граничным условиям трехмерной микрополярной теории (1.5) на поверхности края оболочки Σ.

Для удовлетворения начальным условиям микрополярной трехмерной теории (1.6) следует в четырехмерном пространстве α_n, t считать плоскость $t = 0$ своего рода границей и ввести понятие погранслойного явления около этой границы [13]. На основании такого подхода введем в рассмотрение дополнительное напряженно-деформированное состояние, имеющее ту же изменяемость по координатам, что и внутренняя задача, а по времени — большую изменяемость. Такое НДС вызывает высокочастотные колебания по толщине оболочки, наиболее отчетливо проявляющиеся в переходный момент времени — с начала движения до установившихся динамических явлений, определяемых по теории внутренней задачи (прикладной-двумерной теорией).

3. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.1) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2} \sim 1,\ \frac{\beta}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1,\ \frac{\gamma}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1,\ \frac{\varepsilon}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1. \tag{3.1}$$

Числа ω и k выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях ζ получились непротиворечащие уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения. Таким образом получим:

$$\omega = l - p,\ k = 2l. \tag{3.2}$$

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим следующие асимптотические представления:

$$\begin{gathered}
V_i = R\lambda^{l-p}(V_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_i^1),\ V_3 = R\lambda^{l-2p+c}(V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_3^1),\ \omega_i = \lambda^{l-p-c}(\omega_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\omega_i^1),\\
\omega_3 = \lambda^{l-2p}(\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\omega_3^1),\ \tau_{ii} = \rho c_0^2\lambda^l(\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ii}^1),\ \nu_{ii} = R\rho c_0^2\lambda^{l-c}(\nu_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\nu_{ii}^1),\\
\tau_{ij} = \rho c_0^2\lambda^l(\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\tau_{ij}^1),\ \nu_{ij} = R\rho c_0^2\lambda^{l-c}(\nu_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta\nu_{ij}^1),\\
\tau_{i3} = \rho c_0^2\lambda^{l-p+c}(\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_{i3}^1)(i \leftrightarrow 3),\ \nu_{i3} = R\rho c_0^2\lambda^{l-p}(\nu_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta\nu_{i3}^1)(i \leftrightarrow 3),\\
\tau_{33} = \rho c_0^2\lambda^c(\tau_{33}^0 + \zeta\tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{33}^2),\ \nu_{33} = R\rho c_0^2\lambda^0(\nu_{33}^0 + \zeta\nu_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\nu_{i3}^2),
\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $c = 2p - l$ при $l \leq 2p$, $c = l - 2p$ при $2p \leq l \leq 4p$, $c = 2p$ при $l \geq 4p$.

Используем понятия усредненных силовых и моментных напряжений [10], а также перемещений и независимых поворотов точек срединной поверхности оболочки:

$$u_i = V_i|_{\zeta=0},\ w = -V_3|_{\zeta=0},\ \Omega_i = \omega_i|_{\zeta=0},\ \Omega_3 = -\omega_3|_{\zeta=0}. \tag{3.4}$$

Как главный результат на основе построенной внутренней задачи, на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим систему разрешающих уравнений прикладной-двумерной динамической теории микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_2N_{23})}{\partial\alpha_2}\right]+(q_3^+q_3^-)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(S_{ji}+S_{ij})-(q_i^++q_i^-)=2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+$$
$$+(-1)^j(N_{3j}-N_{j3})-(m_i^++m_i^-)=2Jh\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2},$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}\right]-(S_{12}-S_{21})+(m_3^++m_3^-)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}-\nu\Gamma_{jj}],\ S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}],\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}],$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right]-h\frac{\beta}{\beta+2\gamma}(m_3^+-m_3^-),$$
$$N_{i3}=-2h\frac{4\alpha\mu}{\alpha+\mu}\Gamma_{i3}-\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}N_{3i}, \quad (3.6)$$

$$L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\ N_{3i}=h(q_i^+-q_i^-),\ L_{3i}=h(m_i^+-m_i^-),$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i+(-1)^j\Omega_3,$$
$$\gamma_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}-\frac{u_i}{R_i}, \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{i3}=\gamma_i+(-1)^j\Omega_j,\ \chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},$$
$$\chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\ \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}.$$

Здесь T_{ii}, S_{ij}, N_{i3} — усредненные усилия; L_{ii}, L_{ij}, L_{i3} — усредненные моменты; Γ_{ii}, Γ_{ij}, Γ_{i3} — компоненты тензора деформации, χ_{ii}, χ_{ij}, χ_{i3} — компоненты тензора изгиба-кручения на срединной поверхности оболочки.

Исходя из того, что изменяемость рассматриваемого погранслоя по времени соответствует изменяемости внутренней задачи (т.е. полученной двумерной теории (3.5)-(3.7)), построенный погранслой будет квазистатическим, в результате, в уравнениях погранслойной задачи инерционные члены не будут входить в уравнения на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, а в высоких асимптотических приближениях время τ будет присутствовать как параметр.

Изучая взаимодействие внутренней задачи и погранслоя в рамках асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки получим те же двумерные граничные условия, что и при статической задаче:

$$T_{11}|_\Gamma = \int\limits_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3,\ S_{12}|_\Gamma = \int\limits_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3,\ N_{13}|_\Gamma = -\int\limits_{-h}^{h} p_3^* d\alpha_3, \tag{3.8}$$

$$L_{11}|_\Gamma = \int\limits_{-h}^{h} m_1^* d\alpha_3,\ L_{12}|_\Gamma = \int\limits_{-h}^{h} m_2^* d\alpha_3,\ L_{13}|_\Gamma = -\int\limits_{-h}^{h} m_3^* d\alpha_3.$$

Нам остается выяснить, какие начальные условия необходимо сформулировать для прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7) микрополярных оболочек со свободным вращением. Для этой цели рассмотрим соответствующий временной погранслой около границы $t = 0$. Для этого дополнительного НДС изменяемость по координатам такая же, как для внутренней задачи, и в то же время имеющая большую изменяемость во времени, т. е. $\omega = 0$. Таким образом для определения компонентов векторов перемещения и независимого поворота на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 V_m^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_m^2}\frac{\partial^2 V_m^*}{\partial \tau^2} = 0,\ a_1 = a_2 = \sqrt{\overline{\mu}+\overline{\alpha}},\ a_3 = \sqrt{\frac{1}{\overline{\lambda}+2\overline{\mu}}}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_m^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{b_m^2}\frac{\partial^2 \omega_m^*}{\partial \tau^2} = 0,\ b_1 = b_2 = \sqrt{\frac{\overline{\gamma}+\overline{\varepsilon}}{\overline{J}}},\ b_3 = \sqrt{\frac{1}{(\overline{\beta}+2\overline{\gamma})\overline{J}}}.$$

Из тех же уравнений для рассматриваемого случая, определяя силовые $(\tau_{3m}^*, \tau_{33}^*)$, и моментные (μ_{3m}^*, μ_{33}^*), напряжения при отсутствии этих же напряжений при $\zeta = \pm 1$ на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим граничные условия:

$$\frac{\partial V_m^*}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial \omega_m^*}{\partial \zeta}|_{\zeta=\pm1} = 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, построение указанного дополнительного НДС (временного погранслоя) на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$ сводится к решению волновых уравнений (3.9) с учетом граничных (3.10) и начальных условий (последние пока будем считать произвольно заданными).

Так как все шесть уравнений и граничные условия (3.9), (3.10) в математическом отношении идентичны, рассмотрим одно из этих уравнений и граничных условий в общих обозначениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\pm 1} = 0, \tag{3.11}$$

к которым присоединим также начальные условия:

$$\left.u\right|_{\tau=0} = f^*(\zeta), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = F^*(\zeta), \tag{3.12}$$

где будем считать, что функции $f^*(\zeta)$ и $F^*(\zeta)$ — наперед заданные функции в интервале $[-1;1]$. Общее решение начально-граничной задачи (3.11)-(3.12) (на основе метода разделения переменных) можно представить в следующем виде [14]:

$$u = u_0 + u_1\tau + u', \text{ где } u_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)d\zeta, \; u_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F^*(\zeta)d\zeta, \tag{3.13}$$

а u' — чисто осциллирующая часть решения.

Для того чтобы решение $u(\zeta,\tau)$ являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, т. е. чтобы средние значения начальных данных (3.12) обращались в нуль, на основе чего получим [14]:

$$\int_{-1}^{1} f^*(\zeta)d\zeta = 0, \; \int_{-1}^{1} F^*(\zeta)d\zeta = 0. \tag{3.14}$$

Условия (3.14) принято называть условиями осцилляции.

Теперь на основе условий осцилляции (3.14) можем сращивать решение внутренней задачи (прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7)) с решением временного погранслоя, для удовлетворения заданным трехмерным начальным условиям (1.6). В результате для прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7) получим следующие начальные условия:

$$\left.u_i\right|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f_i d\alpha_3, \; \left.w\right|_{t=0} = -\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f_3 d\alpha_3, \; \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F_i d\alpha_3 \; (i=1,2), \tag{3.15}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F_3 d\alpha_3, \; \left.\Omega_n\right|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \varphi_n d\alpha_3, \; \left.\frac{\partial \Omega_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \Phi_n d\alpha_3 \; (n=1,2,3).$$

Таким образом система уравнений (3.5)-(3.7), граничные (3.8) и начальные (3.15) условия определяют математическую модель динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек с НППВ.

4. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Предположим, что безразмерные физические константы материала оболочки (2.2) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2} \sim 1, \ \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2} = \lambda^{-2l}\beta_*, \ \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2} = \lambda^{-2l}\gamma_*, \ \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2} = \lambda^{-2l}\varepsilon_*, \tag{4.1}$$

где $\beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1$.

Сформулируем сначала внутреннюю задачу на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$. Для чисел ω и k в рассматриваемом случае получим:

$$\omega = l - c, \ k = 2p - 2c. \tag{4.2}$$

Качественной стороной построенной асимптотики является то, что повороты точек срединной поверхности оболочки связаны с перемещениями этих же точек (как в классической теории упругих оболочек).

Введя усредненные силовые и моментные характеристики [10] и используя обозначения (3.4), как главный результат, исходя из построенной асимптотики (4.1), (4.2) на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим систему разрешающих уравнений прикладной-двумерной динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением:

уравнения движения

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}\right] = 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(S_{ji} + S_{ij}) = 2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (q_i^+ + q_i^-),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}[(G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) - (G_{jj} + (-1)^j L_{ji})] -$$

$$- \frac{1}{A_j}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}(H_{ji} + (-1)^j L_{jj}) - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}[(H_{ji} + (-1)^j L_{jj}) + (H_{ij} - (-1)^j L_{ii})] - N_{i3} =$$

$$= -h(q_i^+ - q_i^-) - (-1)^j\left[2\rho h\frac{\partial^2\Omega_j}{\partial t^2} + (m_j^+ + m_j^-)\right] = 0;$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}], \ S_{ij} = \frac{2Eh}{1+\nu}[\Gamma_{12} + \Gamma_{21}] + (-1)^j\frac{1}{2}(m_3^+ + m_3^-),$$

$$G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii} + \nu K_{jj}], \ H_{ij} = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)}[K_{12} + K_{21}] + (-1)^j\frac{1}{2}[(m_3^+ - m_3^-) + L_{33}],$$

$$L_{ij} = 2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}], \tag{4.4}$$

$$L_{ii} = 2h\left[\frac{4\gamma(\gamma+\beta)}{2\gamma+\beta}\chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{2\gamma+\beta}\chi_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{33} = \left(\frac{th(hk_1)}{hk_1} - 1\right)4h\gamma(\chi_{11} + \chi_{22}) - \frac{th(hk_1)}{k_1}(m_3^+ - m_3^-);$$

геометрические соотношения

$$
\begin{gathered}
\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,\ \beta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\\
K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_j,\ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\beta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\beta_i,\ \Omega_i=-(-1)^j\beta_j,\\
\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\ \Omega_3=\frac{1}{2}(\Gamma_{21}-\Gamma_{12}).
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

Так как погранслой имеет квазистатический характер, при сращивании внутренней и погранслойной задач получим те же граничные условия, что и в статике [10]:

$$
\begin{gathered}
T_{11}|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}|_\Gamma=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ (L_{12}-G_{11})|_\Gamma=\int_{-h}^{h}(\alpha_3p_1^*+m_2^*)d\alpha_3,\\
\left[-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_{12}-L_{11})\right]|_\Gamma=\int_{-h}^{h}\left[p_3^*+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(\alpha_3p_2^*-m_1^*)\right]d\alpha_3.
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

Чтобы выяснить начальные условия для двумерной системы уравнений, необходимо построить соответствующий временной погранслой, для которого получим:

$$k=2p-2c,\ \omega=0. \tag{4.7}$$

При сращивании решения внутренней задачи (прикладной-двумерной теории (4.3)-(4.5)) с решением временного погранслоя (здесь опять имеем задачи типа (3.11)-(3.13)) и удовлетворении заданным трехмерным начальным условиям (1.6) получим те же начальные условия (3.16) для прикладной-двумерной теории (4.3)-(4.5).

Таким образом, система уравнений (4.3)-(4.5), граничные условия (4.6) и начальные условия (3.16) определяют математическую модель динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением.

5. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью". Предположим, что физические безразмерные параметры (2.2) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2}=\lambda^{-2l+2p}\alpha_*,\ \frac{\beta}{R^2\rho c_0^2}=\beta_*,\ \frac{\gamma}{R^2\rho c_0^2}=\gamma_*,\ \frac{\varepsilon}{R^2\rho c_0^2}=\varepsilon_*, \tag{5.1}$$

где $\alpha_*,\beta_*,\gamma_*,\varepsilon_*\sim 1$.

Для чисел ω и k в рассматриваемом случае получим:

$$\omega=l-c,\ k=2l+2p-2c. \tag{5.2}$$

Отметим, что на основании (5.1), (5.2) в получаемых двумерных уравнениях внутренней задачи микрополярных оболочек величины "чисто моментного" происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения "чисто моментной" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})-$$

$$-(m_i^++m_i^-)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}, \qquad (5.3)$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial \alpha_2}\right]+(m_3^++m_3^-)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2};$$

соотношения упругости

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\chi_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\chi_{jj}\right],\ L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\chi_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{ji}], \qquad (5.4)$$

$$L_{i3}=-2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\chi_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}L_{3i},\ L_{3i}=h(m_i^+-m_i^-);$$

геометрические соотношения

$$\chi_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_j-\frac{\Omega_3}{R_i},\ \chi_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\Omega_i,\ \chi_{i3}=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial \alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}. \qquad (5.5)$$

Уравнения "чисто силовой" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ji}+S_{ij})-(q_i^++q_i^-)=2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \qquad (5.6)$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}+\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial \alpha_2}\right]+(q_3^++q_3^-)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$N_{3i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_{ii}}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(G_{ii}-G_{jj})-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(H_{ji}+H_{ij})+h(q_i^+-q_i^-);$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}],\ S_{12}=S_{21}=2h\mu[\Gamma_{12}+\Gamma_{21}],\ N_{i3}=N_{3i}-8h\alpha\Gamma_{i3},$$

$$G_{ii}=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],\ H_{12}=H_{21}=\frac{2h^3}{3}\mu[K_{12}+K_{21}]; \qquad (5.7)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j-\frac{w}{R_i},\ \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i,\ \Gamma_{i3}=-\beta_i+(-1)^j\Omega_j,\ \ (5.8)$$

$$\beta_i=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\ K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\beta_j,\ K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\beta_i.$$

Так как погранслой квазистатический, граничные условия для "моментной части задачи" и "силовой части задачи" будут те же, что и при статике [10]:

для моментной части задачи (для системы уравнений (5.3)-(5.5)):

$$L_{1i}\Big|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}m_i^*d\alpha_3,\ L_{13}\Big|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}m_3^*d\alpha_3-\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3m_2^*d\alpha_3; \qquad (5.9)$$

для силовой части задачи (для системы уравнений (5.6)-(5.8)):

$$\begin{gathered}T_{11}|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_1^*d\alpha_3,\ S_{12}|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_2^*d\alpha_3,\ G_{11}|_{\Gamma}=-\int_{-h}^{h}\alpha_3p_1^*d\alpha_3,\\ \left(-N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}\right)\Bigg|_{\Gamma}=\int_{-h}^{h}p_3^*d\alpha_3+\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{-h}^{h}\alpha_3p_2^*d\alpha_3.\end{gathered} \qquad (5.10)$$

Для констатирования начальных условий для двумерных систем уравнений (5.3)-(5.5), (5.6)-(5.8) построен соответствующий временной погранслой (эта задача также идентична задаче (3.11)-(3.13)); в изучаемом случае будем иметь:

$$k=2l+2p-2c,\ \omega=0. \qquad (5.11)$$

На основе сращивания внутренней задачи и временного погранслоя получим те же начальные условия (3.15) для основной системы уравнений (5.3)-(5.8).

Таким образом, двумерные уравнения (5.3)-(5.5) и (5.6)-(5.8), граничные (5.9), (5.10) и начальные (3.15) условия определяют математическую модель микрополярных оболочек с "малой сдвиговой жесткостью".

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек

Рассматривается начально-краевая задача трехмерной, микрополярной, моментной, несимметричной теории упругости со свободным вращением для тонкой области оболочки. В зависимости от значений безразмерных физических констант материала оболочки построены три различные асимптотики. Исходное приближение, соответственно, для первой асимптотики приводит к динамической теории микрополярных оболочек со свободным вращением; второй асимптотики — к динамической теории микрополярных оболочек со стесненным вращением; для третьей асимптотики — к теории микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью".

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ս. Հ. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների դինամիկական տեսություններ

Թաղանթի բարակ տիրույթում դիտարկվում է ազատ պտույտներով միկրոպոլյար, մոմենտային, ոչ սիմետրիկ առաձգականության եռաչափ նախնական-եզրային խնդիրը: Կախված թաղանթի նյութի անչափ ֆիզիկական հաստատունների արժեքներից՝ կառուցված են երեք տարբեր ասիմպտոտիկաներ: Առաջին ասիմպտոտիկայի ելակետային մոտավորությունը հանգեցնում է միկրոպոլյար թաղանթների ազատ պտույտներով դինամիկական տեսությանը, երկրորդ ասիմպտոտիկան՝ միկրոպոլյար թաղանթների կաշկանդված պտույտներով դինամիկական տեսությանը, երրորդ ասիմպտոտիկան՝ միկրոպոլյար թաղանթների «փոքր սահքային կոշտությամբ» դինամիկական տեսությանը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Dynamic Theories of Micropolar Thin Elastic Shells

The aim of the present paper is to investigate the initial-boundary problems of three-dimensional micropolar, momental, asymmetrical theory of elasticity with independent rotation. Depending on the values of sizeless physical constants of the shell‘s material, three different asymptotics are constructed. Initial approximation for the first asymptotics will correspondingly result in the dynamic theory of micropolar shells with independent rotation; for the second asymptotics - in the dynamic theory of micropolar shells with constraint rotations, and for the third one - in the theory of micropolar shells with "small shift rigidity".

Литература

1. *Green A. E., Naghdi P. M.* - Intern. J. Solid and Struct. 1968. V. 4. N 6. P. 585-592.

2. *Жилин П. А.* - Динамика и прочность машин. Тр. Ленингр. политех. ин-та. 1982. N 386. С. 29-42.

3. *Шкутин А. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск. Наука. 1988. 128 с.

4. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* - Изв. вузов. Сев.-Кавказск. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. 2003. С. 124-169.

5. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.

6. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. N5. С. 41-54.

7. *Sargsyan S. H.* - Proc. of XXXIV Summer School "Advanced Problems in Mechanics". 2006. Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.

8. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.

9. *Саркисян С. О.* - ДНАН Армении. 2008. Т.108. N4. С. 309-319.

10. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc, Pergamon Press. 1986. 383 p.

11. *Гольденвейзер А. Л.* - Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С. 137-182.

12. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 232 с.

13. *Гусейн Заде М. И.* - Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 899-907.