ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МЕХАНИКА

УДК 539.1

А. В. Варданян

Аналитическое и численное определение частот колебаний тонких бесконечных магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.Г. Багдоевым 19/XII 2008)

Ключевые слова: *изгибные колебания, магнитоупругая пластина*

С применением приближенного пространственного подхода [1] и по гипотезе Кирхгофа [2-5] рассматривается решение задач колебаний магнитоупругих бесконечных пластин.

1. Решение задачи для идеально проводящей пластины по приближенному пространственному подходу. В плоскости *x, z* рассматривается магнитоупругая идеально проводящая пластина.

Начальное магнитное поле H_0 направлено по нормали пластины. Верхние грани $z = \pm h$ свободны от напряжений. Уравнения магнитоупругости для компонентов перемещений u_x, u_z и возмущенного поля h_x, h_z имеют вид

$$z = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + z\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ &\frac{b^2}{a^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + z\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$h_x = H_0 \frac{\partial u_x}{\partial z}, \; h_z = -H_0 \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$a_1^2 = \frac{H_0^2}{4pr}$$

r – плотность, a, b – скорости упругих волн.

Граничные условия на свободных поверхностях пластины в первом порядке малости будут

$$z = \pm h, \; \begin{cases} s_{xz} + \dfrac{H_0 h_x}{4p} = H_0 h_x^{(e)} \\ s_{zz} = 0, \; h_z = h_z^{(e)} \end{cases} \tag{1.2}$$

где $h_{x,z}^{(e)}$ – компоненты возмущений в диэлектрике $|z| > h$. В предположении малости h по сравнению с l для изгибных волн можно видеть, что в пластине $|z| << l, \; |u_z| >> |u_x|, \; |h_x| >> |h_z|$, а в диэлектрике имеет место $\left|h_z^{(e)}\right| \sim \left|h_x^{(e)}\right|$, и тогда в (1.2) $|h_x| >> \left|h_x^{(e)}\right|$. Отбросив правую часть в первом уравнении, соотношения на границе пластины можно записать:

$$z = \pm h, \; \begin{cases} s_{xz} + r a_1^2 \dfrac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \\ s_{zz} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

где согласно закону Гука

$$\begin{aligned} &\frac{s_{xz}}{r} = b^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ &\frac{s_{zz}}{r a^2} = \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в напряжениях имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xz}}{\partial z} = r \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - a_1^2 r \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ &\frac{\partial s_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} = r \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Как и в общем случае конечно проводящей пластины [1], в случае идеально проводящей можно искать решение для бесконечной пластины в виде

$$
\begin{aligned}
&u_{x,z} = \frac{1}{2} e^{-iw't+ikx} U_{x,z}(z) + k.c.,\\
&U_x = U,\ U_z = V,\\
&U(z) = B_j sh n'_j z,\ V(z) = A_j ch n'_j z,\ k = l_m
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

где по $j=1,2$ суммируется, причем $h_{x,z}$ найдутся по (1.1). Тогда, учитывая решение из уравнений (1.1) и граничных условий (1.2), можно, введя безразмерные переменные $\frac{w'}{ak} = w,\ \frac{n'_j}{k} = n_j$, получить систему, состоящую из дисперсионного уравнения и дополнительного уравнения для n_j. Отбрасывая штрихи, получим

$$
\begin{vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0
\tag{1.7}
$$

$$
\Lambda_{1,2} = n_{1,2} + \frac{z n_{1,2}}{n_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + w^2} + \frac{a^2}{b^2} a^2 n_{1,2} + \frac{a^2}{b^2} a^2 th \frac{n_{1,2}}{2} kh,
$$

$$
\Gamma_{1,2} = \left(1 - 2\frac{b^2}{a^2}\right) th \frac{n_{1,2}}{2} kh - \frac{z n_{1,2}^2}{n_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + w^2} th \frac{n_{1,2}}{2} kh,
$$

$$
\left(n_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + w^2\right)\left(\frac{b^2}{a^2} n_{1,2}^2 - 1 + w^2 + n_{1,2}^2 a^2 - a^2\right) + z^2 n_{1,2}^2 = 0
\tag{1.8}
$$

где $a = \frac{a_1}{a}$ и выбираются корни биквадратного уравнения $n_{1,2} > 0$. В табл. 1 приведено численное решение (1.7), (1.8), а в табл. 2 – соответствующие расчеты по гипотезе Кирхгофа. При этом значения w по указанным таблицам близки до величин $a = \frac{1}{10}$.

Таблица 1

a \ kh	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025
10^{-8}	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025

10^{-6}	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025
10^{-4}	0.00272346	0.00544387	0.00816434	0.0108841	0.0136029
10^{-3}	0.00290036	0.00553493	0.00822563	0.0109304	0.0136401
10^{-2}	0.0103862	0.011427	0.0129644	0.0148442	0.0169524
10^{-1}	0.0988082	0.0991551	0.0995728	0.10006	0.100617

Таблица 2

a \ kh	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-8}	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-6}	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-4}	0.00272349	0.00544423	0.00816558	0.0108871	0.0136086
10^{-3}	0.00289955	0.0055344	0.00822598	0.0109325	0.013645
10^{-2}	0.0103638	0.0113855	0.0129099	0.0147824	0.0168874
10^{-1}	0.100037	0.100148	0.100333	0.100591	0.100922

Из табл. 1, 2 видно, что для практически применяемых в технике полей значения частот по приближенному пространственному подходу и по гипотезе Кирхгофа отличаются незначительно.

2. Решение задачи о конечно проводящей пластине. Пусть ось x направлена вдоль средней линии пластины, вдоль которой распространяется волна, ось z направлена по нормали к ней, невозмущенное поле H_0 направлено по оси z. Обозначим возмущенное поле

$$h_x = H_0 H'_x,\ h_z = H_0 H'_z, \tag{2.1}$$

полное поле $H_x = h_x,\ H_z = H_0 + h_z$.

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [2-5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_{xz}}{\partial z} &= r\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{4p}(\mathrm{rot}\,\bar{h} x \bar{H}_0)_x \\ \frac{\partial s_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z} &= r\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{4p}(\mathrm{rot}\,\bar{h} x \bar{H}_0)_z \end{aligned} \tag{2.2}$$

где r – плотность,

$$s_x = (l + 2m)\frac{\partial u_x}{\partial x} + l\,\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad s_z = l\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + (l + 2m)\frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$s_{xz} = m\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

Уравнение электромагнитной индукции записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\, x\bar{H}_0\right) + n_m \Delta \bar{h}\ . \tag{2.4}$$

Здесь s – электропроводность, $n_m = \dfrac{c^2}{4ps}$ – магнитная вязкость, c – скорость света.

В поперечном магнитном поле уравнения (2.2)-(2.4) дают

$$z = 1 - \frac{b^2}{a^2}\ ,$$

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{d^2U_x}{dz^2} - k^2U_x + \frac{w^2}{a^2}U_x + ikz\,\frac{dU_z}{dz} = -\frac{a_1^2}{a^2}\left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_z\right)$$
$$-iwH_x + n_m k^2 H_x - n_m\,\frac{d^2H_x}{dz^2} = -iw\,\frac{dU_x}{dz}$$
$$ikz\,\frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2}k^2U_z + \frac{w^2}{a^2}U_z = 0 \tag{2.5}$$
$$-iwH_z + n_m k^2 H_z - n_m\,\frac{d^2H_z}{dz^2} = -wkU_x$$

где $a_1^2 = \dfrac{H_0^2}{4pr}$, $a^2 = \dfrac{l + 2m}{r}$, $b^2 = \dfrac{m}{r}$.

Согласно пространственному подходу [1] решение уравнений движения магнитоупругой среды и уравнения индукции можно искать в виде

$$u_{x,z} = \frac{1}{2}U_{x,z}(z)e^{it} + k.c.,\ t = kx - wt,$$
$$H'_{x,z} = \frac{1}{2}H_{x,z}(z)e^{it}\,,$$
$$U_z = A_j ch n_j z,\ U_x = B_j sh n_j z, \tag{2.6}$$
$$H_x = C_j ch n_j z,\ H_z = D_j sh n_j z$$

где по j суммируется от 1 до 3, w – частота, k – волновое число для бесконечной по x пластины, а для конечной по $x(0,l)$, свободно опертой пластины в (2.6) должно вместо

e^{ikx} стоять $\sin kx,\ m=1,2,...,\ k=\frac{pm}{l}$, а w будет тем же.

Подставляя (2.6) в вышеуказанные уравнения, можно получить уравнение для $n_j,\ z=1-\frac{b^2}{a^2}$:

$$\frac{b^2}{a^2}n_j^2-k^2+\frac{w^2}{a^2}+z^2\frac{n_j^2k^2}{n_j^2-\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{w^2}{a^2}}=-\frac{a_1^2}{a^2}\frac{n_j^2-k^2}{1+i\frac{k^2-n_j^2}{w}n_m}, \qquad (2.7)$$

$n_m=\frac{c^2}{4pr}$ – магнитная вязкость, s – электропроводность, c – скорость света. Из граничных условий при $z=\pm\frac{h}{2}$ получится дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} \frac{1+\frac{k}{n_1}thn_1\frac{h}{2}}{c_1} & \frac{1+\frac{k}{n_2}thn_2\frac{h}{2}}{c_2} & \frac{1+\frac{k}{n_3}thn_3\frac{h}{2}}{c_3} \\ 1+\frac{z}{\Delta_1}k^2 & 1+\frac{z}{\Delta_2}k^2 & 1+\frac{z}{\Delta_3}k^2 \\ \frac{thn_1\frac{h}{2}}{n_1}\Gamma_1 & \frac{thn_2\frac{h}{2}}{n_2}\Gamma_2 & \frac{thn_3\frac{h}{2}}{n_3}\Gamma_3 \end{vmatrix}=0, \qquad (2.8)$$

$$\Delta_j=n_j^2-\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{w^2}{a^2},\ \Gamma_j=\frac{a^2-2b^2}{a^2}-\frac{zn_j^2}{\Delta_j},$$

$$c_j=1+i\frac{k^2-n_j^2}{w}n_m$$

Результаты численного решения (2.7), (2.8) двумя способами: прямым численным решением в комплексных числах для частоты и другим способом, полагая $w=w_1+iw_2$ и разделяя действительные части уравнений от мнимых, совпали и приведены в табл. 3, причем введены безразмерные величины в виде $w'=\frac{w}{ak},\ n_j'=\frac{n_j}{k},\ \frac{a_1}{a}=a$ и положено $a=5*10^5$ см/с, $n_m=1000$ см^2/с; в таблице приведены значения $\mathrm{Re}\,w'$, т. е. действительной части. А по гипотезе Кирхгофа

$$w^2 = w_{00}^2 - \frac{2a_1^2k^2}{h} \frac{l_1 \frac{h}{2} ch l_1 \frac{h}{2} - sh l_1 \frac{h}{2}}{ch l_1 \frac{h}{2} + \frac{k}{l_1} sh l_1 \frac{h}{2}}, \quad l_1 = \sqrt{k^2 - \frac{iw}{n_m}}, \qquad (2.9)$$

$w_{00}^2 = \frac{1}{3} z\, h^2 k^4 b^2$; расчеты для $\mathrm{Re}\, w'$ даны в табл. 4.

Таблица 3

a \ kh	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	0.00272165	0.00544365	0.00816372	0.0108837	0.0136026
0.03	0.00272162	0.00544293	0.00816368	0.0108837	0.0136025
0.06	0.00272157	0.00544285	0.00816363	0.0108835	0.0136024
0.1	0.00272129	0.00544231	0.0081628	0.0108825	0.0136011
0.2	0.00271651	0.00543277	0.00814855	0.0108636	0.0135777
0.3	0.00269567	0.00539115	0.00808626	0.0107808	0.0134746

Таблица 4

a \ kh	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	0.00272152	0.00544304	0.00816457	0.0108861	0.0136076
0.03	0.00272044	0.0054409	0.00816137	0.0108819	0.0136024
0.06	0.00271677	0.0054336	0.00815048	0.0108674	0.0135844
0.1	0.00270785	0.00541585	0.00812401	0.0108323	0.0135408
0.2	0.00266177	0.00532421	0.00798736	0.0106512	0.0133158
0.3	0.00256839	0.00513869	0.00771092	0.0102851	0.0128613

Относительное отличие $\mathrm{Re}\, w'$ в табл. 3 и 4 при $a = 0.3$, 5%. До значений $\alpha = 0.1$ (соответствует $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Гаусс $= 3$ Тесла для алюминия) гипотеза Кирхгофа дает хорошее совпадение с решением по приближенному пространственному подходу.

При пространственном подходе значения мнимой части w' $\mathrm{Im}\, w' < 0$ и все колебания устойчивы.

Институт механики НАН РА

А. В. Варданян

Аналитическое и численное определение частот колебаний тонких бесконечных магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле

Рассматривается решение задач колебаний магнитоупругих бесконечных пластин с применением приближенного пространственного подхода и по гипотезе Кирхгофа.

Аналитически и численно получены значения частот. Проводится сравнение таблиц частот изгибных колебаний по пространственному подходу и гипотезе Кирхгофа. Установленно, что до значений $\alpha = 0.1$ (соответствует $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Гаусс $= 3$ Тесла для алюминия) гипотеза Кирхгофа дает хорошее совпадение с решением по приближенному пространственному подходу.

Ա. Վ. Վարդանյան

Լայնական մագնիսական դաշտում բարակ անվերջ մագնիսաառաձգական սալերի տատանումների հաճախությունների որոշումը անալիտիկ և թվային մեթոդներով

Դիտարկվում է մոտավոր տարածական դրվածքով և Կիրխհոֆի վարկածով անվերջ մագնիսաառաձգական սալի տատանումների հաճախությունների որոշման խնդիրը:

Ստացվել են անալիտիկ և թվային արդյունքներ հաճախությունների համար: Կատարվում է համեմատություն ծռման տատանումների հաճախությունների միջև՝ ստացված տարածական մոտեցմամբ և Կիրխհոֆի վարկածով: Արդյունքում ստացվել է, որ մինչև $\alpha = 0.1$ արժեքը (որը համապատասխանում է $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Gauss $= 3$ Tesla -ին ալյումինե սալի համար) Կիրխհոֆի վարկածով ստացված հաճախությունների արժեքները համընկնում են մոտավոր տարածական դրվածքով ստացված արժեքների հետ:

A. V. Vardanyan

Analytical and Numerical Solutions of Thin Infinite Magnetoelastic Plate Vibrations' Frequencies in Transversal Magnetic Field

The investigation for thin infinite magnetoelastic plate by approximate space treatment [1] and by Kirkhoff hypothesis [2-5] is given in this paper.

There were obtained the analytical and numerical results for frequencies. The comparison between the results obtained by these approaches was done. The obtained results show that until $\alpha = 0.1$ value (corresponds $H_0 = 3 \cdot 10^4 \text{Gauss} = 3\text{Tesla}$ for aluminum plate) the bending vibrations frequencies values by Kirkhoff hypothesis are close to frequencies value by space treatment.

Литература

1. *Багдоев А.Г., Варданян А.В.* - Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N4. С.22-32.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
3. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е.* Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Изд-во физ.-мат. лит. 1996. 286 с.
4. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1992. 124 с.
5. *Багдасарян Г. Е.* Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Тигран Мец. 1992. 436 с.