

МЕХАНИКА

УДК 539.3:624.04

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 21/X 2008)

**Ключевые слова:** многослойная опора, сейсмическая сила, частота и форма колебаний, оптимизация, сейсмический удар

Одним из эффективных способов сейсмозащиты сооружений является применение так называемых "подушек": они возводятся на основании и представляют из себя многослойную среду из двух материалов. Различным вопросам поведения таких сред посвящены работы [1-3] и др. В [4,5] для сейсмозащиты конструкций предлагалось применение внешних сил, действующих в точках сосредоточенных масс. В дальнейшем [6] обсуждался вопрос о некотором оптимальном выборе этих сил.

В настоящей статье изучается поведение конструкций при наличии упругого основания и его влияние на значение оптимальных сил. Рассматриваются два типа задач — уменьшения или устранения сейсмических сил в заданных точках и эти же вопросы относительно форм колебаний.

1. Выражения для оптимальных внешних сил будем определять исходя из предположения, что рассматриваемая система опирается на слоистую упругую среду. Относительно последней предполагается, что она состоит из чередующихся слоев двух материалов. Сначала определим выражения для приведенных упругих коэффициентов в предположении, что система работает на одномерный сдвиг. Тогда в каждом слое перемещение определится как

$$u_i = A_i x + B_i. \quad (1.1)$$

Предполагается, что имеется  $k + 1$  слоев с толщиной  $h_1$  и коэффициентом упругости  $G_1$ , и  $k$  слоев с данными  $h_2$  и  $G_2$ .

Если принимать, что внешняя плоскость первого слоя неподвижна, а на плоскости последнего слоя действует сдвигающее напряжение  $\tau$ , то удовлетворяя этим и межслоевым условиям

$$u_i = u_{i+1}, \quad G_1 A_i = G_2 A_{i+1}, \quad (1.2)$$

для перемещения верхнего конца будем иметь

$$u/x=h = \alpha_1 \tau, \quad \alpha_1 = \frac{H_1}{G_1} + \frac{H_2}{G_2}, \quad H_1 = (k+1)h_1, \quad H_2 = kh_2, \quad h = H_1 + H_2. \quad (1.3)$$

Если принимать, что для всего пакета верен линейный закон перемещения по всей толщине, то перемещение при  $x = h$  будет

$$u/x=h = \alpha_2 \tau, \quad \alpha_2 = \frac{h^2}{G_1 H_1 + G_2 H_2}. \quad (1.4)$$

Отметим, что, во-первых,  $\alpha_1 > \alpha_2$  и, во-вторых, в выражениях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  характер чередования слоев не проявляется, т.е. имеется суммарный эффект.

2. Изучим вопрос, как изменяются частоты стержня (сооружение моделируется как стержень), когда обычные условия жесткого защемления заменяются упругой связью по (1.3). Рассмотрим два случая, когда в стержне осуществляются сдвиговые и изгибные колебания.

В первом случае для уравнения колебания стержня

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (2.1)$$

один край которого свободен ( $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  при  $x = l$ ), на другом конце вместо обычного условия защемления возьмем

$$G \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_1} v \text{ при } x = 0. \quad (2.2)$$

Для определения частот ( $\omega$ ) имеем

$$\alpha p t g p = 1, \quad p = \frac{\omega l}{a}, \quad \alpha = \frac{G}{l} \alpha_1. \quad (2.3)$$

При этом формы колебаний будут

$$X_n(x) = \left\{ \cos \frac{\omega_n (l-x)}{a} \right\}. \quad (2.4)$$

На рис.1 приведены кривые первых трех безразмерных частот ( $p_i$ ) в зависимости от  $\alpha$ .

В случае изгиба стержня уравнение движения

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

с условиями на концах

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{F}{\alpha_1} w = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = l \end{aligned} \quad (2.6)$$

дают следующее характеристическое уравнение:

$$\cos pchp + 1 = \alpha p^3 (chp \sin p + shp \cos p). \quad (2.7)$$

Здесь

$$p^4 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4, \quad \alpha = \frac{EJ}{Fl^3} \alpha_1. \quad (2.8)$$

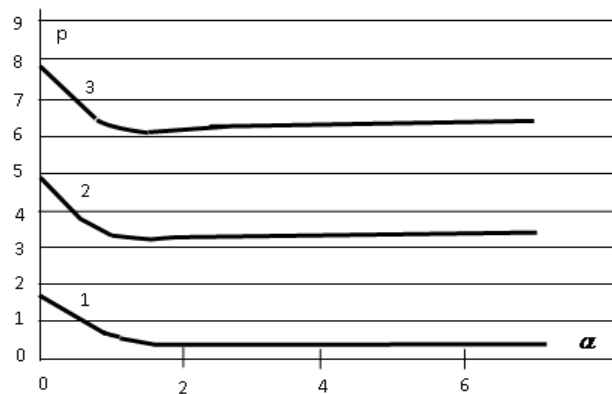


Рис. 1

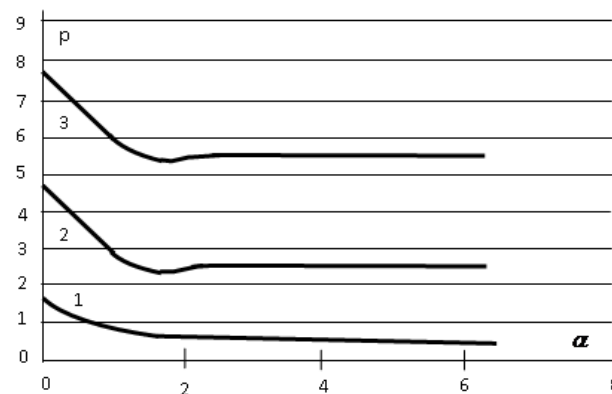


Рис. 2

При этом формы колебаний определяются выражением

$$\begin{aligned} X_n(\xi) = [chp_n(1 - \xi) + \cos p_n(1 - \xi)](chp_n + \cos p_n) - \\ - [shp_n(1 - \xi) + \sin p_n(1 - \xi)](shp_n - \sin p_n), \quad x = \xi l. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На рис. 2 приведены кривые первых трех частот ( $p_1$ ) в зависимости от  $\alpha$ . Значение  $\alpha = 0$  соответствует случаю жесткого защемления.

Как показывают кривые на рис. 1 и 2, с увеличением  $\alpha$  частоты уменьшаются, как и следовало ожидать, при этом очень сильное изменение претерпевает первая частота.

3. Рассматриваемую сплошную систему заменим дискретной системой с  $n$  степенью свободы с сосредоточенными массами. Если помимо сейсмических сил в точках сосредоточенных масс  $m_j$  приложены также внешние силы  $F_j$ , то система уравнений движения такой системы запишется в виде [4,6]

$$X_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}[m_j(\ddot{x}_j - \ddot{x}_0) - F_j]. \quad (3.1)$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  — перемещение в точке  $i$  от единичной силы, приложенной в точке  $j$ . Их определим из решения задачи статики изгиба стержня. Прогиб балки от приложенной в точке  $b$  силы  $P$  с учетом концевых условий (2.6) будет

$$w(x) = \frac{Px^3}{2EJ} \left(b - \frac{x}{3}\right) + \frac{P\alpha_1}{F}. \quad (3.2)$$

Если балку разделить на  $n + 1$  равных частей (не обязательно) длиной  $a$ , то

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{j^2 a^3}{2EJ} \left(j - \frac{i}{3}\right) + \frac{\alpha_1}{F}, & i \neq j, \\ \frac{j^3 a^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, & i = j. \end{cases} \quad (3.3)$$

Если массу балки также распределить на равные части, то

$$m_j = m = \frac{M}{n}, \quad M = Fl\rho, \quad (n + 1)a = l. \quad (3.4)$$

По (3.3) из (3.1) можно определить и собственные частоты и сравнить их с аналогичными из рис. 1 и 2.

Вводя новые переменные  $y_k$  [7] (с. 28-29)

$$x_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} y_k, \quad (3.5)$$

вместо (3.1) будем иметь каноническую систему

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = \Phi_k(t) = \frac{\sum_{j=1}^n C_{jk}(F_j - m_j \ddot{x}_0)}{\sum_{j=1}^n m_j C_{jk}^2}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) определяются обобщенные координаты (собственные формы колебаний) и выражения суммарных воздействий (сейсмических и действующих активных сил) в точках сосредоточенных масс. В частности, при нулевых начальных условиях имеем

$$y_k = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \Phi_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

$$S_k = m_k \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \int_0^t (m_j \ddot{x}_0 - F_j) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau + \sum_{i,j}^n C_{ji} \eta_{ki}^* F_j(t), \quad \eta_{ki}^* = \frac{C_{ki}}{\sum_{q=1}^n C_{qi}^2 m_q}. \quad (3.8)$$

В [6] последний член в (3.8) пропущен, хотя для окончательного ответа это роли не сыграло.

Как видно из (3.8), при наличии упругой связи сейсмические силы уменьшаются, что и естественно, так как уменьшаются собственные частоты.

4. Задачи оптимальности можно ставить по-разному и по-разному определять критерий оптимальности. Как более естественный и наиболее принятый мы потребуем минимум функционала

$$J = \int_0^T \sum_{j=1}^s F_j^2 dt, \quad (4.1)$$

что равносильно минимуму каждого слагаемого. В (4.1)  $s \leq n$ .

Изучим два типа задач.

I. В некоторых точках системы (или во всех точках) в момент времени  $t = T$  уменьшить в  $\alpha_k$  раз или вообще свести к нулю сейсмическую силу при условии, что силы должны удовлетворять условию (4.1), т.е.

$$(1 - \alpha_k) \Psi_k(T) = \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \int_0^T F_j(\tau) \sin \omega_i (T - \tau) d\tau - \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \eta_{ki}^* F_j(T). \quad (4.2)$$

Таких уравнений  $s$  ( $s \leq n$ ).

Имеется типичная изопериметрическая задача. Если составить функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^n F_j^2 + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* F_j \sin \omega_i (T - \tau), \quad (4.3)$$

то условие минимума для (4.1) дает

$$2F_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \sin \omega_i (T - \tau) = 0. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2), для определения множителей Лагранжа будем иметь  $s$  алгебраических уравнений.

Примеры возьмем самые простые, так как они не претендуют быть непосредственно продиктованными из практики.

Основная частота балки  $\omega_0 = 3.516 \left( \frac{EJ}{Ml^3} \right)^{1/2}$ . Для получения такой частоты, если заменить ее системой с одной степенью свободы, нужно брать  $b = 0.624l$ . Единственный коэффициент  $c_{11}$  есть

$$c_{11} = \frac{b^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}. \quad (4.5)$$

Суммарная сила в точке сосредоточенной массы

$$S = F(t) - M\omega \int_0^t \ddot{x}_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau - \omega \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Например, если сейсмическая сила действует в виде удара и требуется, чтобы в момент  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  она была устранена, то внешняя сила должна быть

$$F = -\frac{4MI}{\pi} \omega \cos \omega t, \quad I = \int_0^{T_1} \ddot{x}_0 dt, \quad T_1 \ll \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.7)$$

Так как необходимая сила (4.7) пропорциональна частоте, то в зависимости от того, есть в (4.5) второй член или нет, ее максимальное значение сильно изменится. Например, если второй член имеет порядок первого члена, то максимальные значения отличаются друг от друга в 0.707 раза. Возможно, более естественно сравнивать интегралы  $\int_0^{\pi} F^2 dt$  при различных  $\omega$ .

II. Второй тип задач такой — уменьшить или отстранить определенные формы колебаний для заданного момента времени при минимальных внешних нагрузках. На основании (3.6) и (3.7) условия, чтобы некоторые координаты уменьшились в  $\alpha_k$  раз в момент  $t = T$ , будут

$$\sum_{j=1}^n C_{jk} \int_0^T F_j(\tau) \sin \omega_k(T - \tau) d\tau = \varphi_k = (1 - \alpha_k) \sum_{j=1}^n \int_0^T C_{jk} \ddot{x}_0 \sin \omega_k(T - \tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Таких уравнений будет  $s$ .

Критерий качества тот же (4.1). Тогда, составляя функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^s F_j^2 + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{j=1}^s C_{jk} F_j \sin \omega_k(T - \tau), \quad (4.9)$$

обеспечим минимум функционала при

$$2F_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k C_{jk} \sin \omega_k(T - \tau) = 0. \quad (4.10)$$

Для определения множителей Лагранжа  $\lambda_k$  из (4.8) и (4.10) имеем

$$\sum_{j=1}^s \sum_{q=1}^s \lambda_q C_{jk} C_{jq} a_{kq} = \varphi_k, \quad (4.11)$$

$$4a_{kq} = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_k + \omega_q)T}{\omega_k + \omega_q} - \frac{\sin(\omega_k - \omega_q)T}{\omega_k - \omega_q}, & \omega_k \neq \omega_q, \\ \frac{\sin 2\omega_k T}{2\omega_k} - T, & \omega_k = \omega_q. \end{cases}$$

В качестве примера балку заменим системой с двумя степенями свободы. Если сосредоточенные массы поместить в середине и на конце балки, то коэффициенты  $c_{ij}$  будут

$$c_{11} = \frac{l^3}{24EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, \quad c_{12} = \frac{5l^3}{48EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, \quad c_{22} = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}. \quad (4.12)$$

Без  $\alpha_1$  частоты составят

$$\omega_1^{(0)} = 2.335Q, \quad \omega_2^{(0)} = 15.53Q, \quad Q = \left( \frac{EJ}{Ml^3} \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Если брать  $\frac{\alpha_1}{F} = \frac{l^2}{24EJ}$ , то

$$\omega_1 = 2.143Q, \quad \omega_2 = 9.339Q. \quad (4.14)$$

Для первой формы соответственно имеем

$$y_1^{(0)} = \frac{1}{\omega_1^{(0)}} \int_0^t \left( 0.1862 \frac{F}{M} - 0.3837 \ddot{x}_0 \right) \sin \omega_1^{(0)}(t - \tau) d\tau, \quad (4.15)$$

$$y_1 = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \left( 1.7072 \frac{F}{M} - 1.2071 \ddot{x}_0 \right) \sin \omega_1(t - \tau) d\tau.$$

Сила приложена в центре длины балки, и целью является устранение первой формы в момент  $t = T$ . Если, как и в предыдущем примере, предполагать, что сейсмосила действует в виде удара, то для минимальной силы будем иметь выражение

$$F = C \frac{MI \sin \omega(T - t)}{T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega}}. \quad (4.16)$$

Для первого случая  $C = 4.121$  и вместо  $\omega$  должны брать  $\omega_1^0$  из (4.13), а для второго  $C = 1.414$  и  $\omega$  берем из (4.14).

Как и для первого примера, максимальное значение требуемой силы во много раз меньше при упругом основании, чем без него.

Институт механики НАН РА

**Л. А. Мовсисян**

**Об одном комбинированном способе сейсмозащиты**

Вопрос о сейсмозащите конструкций при помощи оптимального выбора внешних сил рассматривается в случае, когда они сооружаются на многослойной упругой среде.

**Լ. Ա. Մովսիսյան**

**Սեյսմապաշտպանության համակցված մի եղանակի մասին**

Արտաքին ուժերի օպտիմալ ընտրության օգնությամբ կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության հարցը քննարկվում է այն դեպքում, երբ վերջիններս դրվում են շերտավոր առաձգական հիմքի վրա:

**L. A. Movsisyan**

**On One Combined Method of Seismoprotection**

The problem on seismoprotection of contractions by optimal choosing of external forces in case of their construction on multilaminated elastic fundamentals is considered.

**Литература**

1. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В.* - ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 293-306.
2. *Агаловян Л.А., Геворкян Р.С.* Неклассические задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер. Гитутюн. НАН РА. 2005. 468 с.
3. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Aghalovyan M.L.* - Journal of Structural Control. 2001. V. 8. N 2. P. 249-263.
4. *Мовсисян Л.А., Хачиян Э.Е.* - Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. N3. С. 62-68.
5. *Хачиян Э.Е., Мовсисян Л.А.* - Сейсмическое строительство. Безопасность сооружений. (ВНИИНТПИ). М. 2004. N1. С. 39-43.
6. *Мовсисян Л.А.* - ДНАН РА. 2007. N3. С. 223-229.
7. *Хачиян Э.Е.* Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ер. Айастан. 1973. 327 с.