ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 109 2009 № 2

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

Г. А. Саргсян

О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/III 2009)

Ключевые слова: *полнота, квадратичный пучок, собственная функция, спектральный параметр*

Исследование некоторых задач математической физики сводится к изучению спектральных свойств квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \tag{0.1}$$

где B и C – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H.

Пучки вида (0.1) возникают, например, в задаче о движении вязкой жидкости, в задаче о колебаниях электромагнитных и акустических волноводов.

Для этого пучка ставится вопрос о двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов, впервые введеной и изученной М. В. Келдышем [1].

В пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

который порождается квадратичным операторным пучком (0.1) при его линеаризации. М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [2] установлена тесная спектральная связь квадратичного операторного пучка (0.1) и ассоциированного с ним оператора (случай, когда оператор B – самосопряженный, C – положительно определенный компактный оператор). В частности показано, что собственные значения пучка (0.1) и оператора (0.2) совпадают с их собственными и алгебраическими кратностями и что, если у оператора П в гильбертовом пространстве H имеется полная система корневых векторов, то у операторного пучка (0.1) имеется двукратно полная система собственных и присоединенных элементов (С.П.Э.), и наоборот. Так что полноту системы корневых векторов оператора можно брать как новое определение двукратной полноты С.П.Э. квадратичного операторного пучка (0.1), которое эквивалентно первоначальному определению М. В. Келдыша [1].

В [3-11] изучены спектральные свойства как линейных, так и полиномиальных операторных пучков, порожденных смешанными задачами, не разрешенными относительно старшей производной по времени.

В настоящей работе рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных третьей краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Пусть Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\delta\Omega$. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу на собственные значения:

$$K_\lambda(u) = Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{1}$$

$$Gu = \gamma u + \omega x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega y\frac{\partial u}{\partial y}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где M, N и L — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами второго порядка

$$Mu = c_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3}$$

$$Nu = b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + b_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{4}$$

$$Lu = a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Относительно оператора L предполагается, что он является эллиптическим. В связи с исследованием вышепоставленных задач мы будем одновременно рассматривать и задачи Дирихле на собственные значения для тех же дифференциальных пучков:

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \tag{6}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Определение. *Отличная от тождественного нуля функция* $u_\lambda(x,y) \in W_2^2(\Omega)$ *называется обобщенной собственной функцией задачи (1), (2) - (6), (7), соответствующей собственному значению* λ, *если она удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле и* $Gu_\lambda \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_2^i(\Omega)$ $(i = 1,2)$ *— пространства С. Л. Соболева.* $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ *— множество функций из* $W_2^1(\Omega)$, *исчезающих на границе* $\partial\Omega$*-области в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.*

Для исследования некоторых общих свойств граничного оператора $Gu = \gamma(x,y)u + \alpha(x,\gamma)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}$, с помощью предельного перехода, получим формулу Грина.

Пусть Ω — ограниченная область двухмерного пространства x, y с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Относительно $\gamma(x,y), \alpha(x,\gamma), \beta(x,y)$ предполагается, что они достаточно гладкие функции в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть $u(x,y)$ и $\nu(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить, что имеют место тождества

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\nu = \nu\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}u\nu = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\nu u) - u\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\nu), \tag{8}$$

$$\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\nu = \nu\frac{\partial}{\partial y}(\beta u) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}u\nu = \frac{\partial}{\partial y}(\beta\nu u) - u\frac{\partial}{\partial y}(\beta\nu), \tag{9}$$

Суммируя тождества (8), (9) и интегрируя по области, перейдя от двойного интеграла к интегралу по границе, согласно известной формуле Грина получим

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega} \nu\left\{\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y}\right\}dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\nu\{\alpha dy - \beta dx\} - \\ - \iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right\}u\nu dxdy - \iint\limits_{\Omega} u\left\{\alpha\frac{\partial \nu}{\partial x} + \beta\frac{\partial \nu}{\partial y}\right\}dxdy.\end{gathered} \tag{10}$$

Таким образом, для произвольных функций u и ν из $C^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega}\left\{\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y}\right\}\nu dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\nu\{\alpha\cos(s,\hat{}\,y) - \beta\cos(s,\hat{}\,x)ds\} - \\ - \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)u\nu dxdy - \iint\limits_{\Omega} u\left\{\alpha\frac{\partial \nu}{\partial x} + \beta\frac{\partial \nu}{\partial y}\right\}udxdy.\end{gathered} \tag{11}$$

С помощью предельного перехода окончательно получаем формулу Грина для граничного оператора G

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega} Gu\nu dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} u\nu(\alpha\cos(s,\hat{}\,y) - \beta\cos(s,\hat{}\,x))ds - \iint\limits_{\Omega} uG\nu dxdy + \\ + \iint\limits_{\Omega}\left(2\gamma - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)u\nu dxdy.\end{gathered} \tag{12}$$

Формула (12) справедлива для произвольных функций $u(x,y)$ и $\nu(x,y)$ из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$. Для функций $u,\nu \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ она принимает вид

$$\iint\limits_{\Omega} Gu\nu dxdy = \iint\limits_{\Omega} \left(2\gamma - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right) u\nu dxdy - \iint\limits_{\Omega} uG\nu dxdy. \qquad (12')$$

В частном случае, когда $\alpha(x,y) = \omega x$, $\beta(x,y) = \varpi y$, делая замену переменных $x = r(\alpha)\cos\alpha$, $y = r(\alpha)\sin(\alpha)$ $(0 \le \alpha \le 2\pi)$ в (10), формулу Грина (13) приведем к виду

$$\iint\limits_{\Omega} Gu\nu dxdy = \varpi \int\limits_{0}^{2\pi} u\nu r^{\,2}_{\,-}(\alpha)d\alpha + 2\iint\limits_{\Omega} (\gamma - \omega)u\nu dxdy - \iint\limits_{\Omega} uG\nu dxdy. \qquad (13)$$

Производные, входящие в формулы (11), понимаются как обобщенные производные в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Из формулы Грина (11) легко усмотреть некоторые общие свойства для граничного оператора G, отображающего соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1. *При выполнении условий*

$$\begin{aligned} &\sigma = \min_{\substack{\max \\ (x,y)\in\overline{\Omega}}} \left[2\gamma(x,y) - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right] \underset{(<)}{>} 0, \\ &\alpha(x,y)\cos(s,\hat{}\,y) - \beta\cos(s,\hat{}\,x) \underset{(\le)}{\ge} 0, \qquad \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned} \qquad (14)$$

оператор G является положительно определенным (отрицательно определенным) оператором, отображающим W_2^1 в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. *При*

$$2\gamma(x,y) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}, \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega} \qquad (15)$$

оператор G является антисимметричным оператором, отображающим $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Справедливость этих утверждений вытекает из следующих соотношений:

$$(Gu,u)_{L_2(\Omega)} \ge \frac{\delta}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega), \qquad (16)$$

$$(Gu,\nu)_{L_2(\Omega)} = -(u,G\nu)_{L_2(\Omega)}, \qquad \forall u,\nu \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \qquad (17)$$

которые являются непосредственными следствиями формул Грина (12), (12′) при условиях (14), (15). Области значений оператора G, действующего, соответственно, на пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, обозначим через $R_*(\Omega) = GW_2^1(\Omega)$ и $\overset{0}{R}_*(\Omega) = G\,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Очевидно включение $\overset{0}{R}_*(\Omega) \subset R_*(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$.

При выполнении условий (14) оператор G имеет обратный G^{-1}, отображающий область значений $R_*(\Omega)$ оператора G на функциональное пространство $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $h_*(\Omega)(\overset{0}{h}_*(\Omega))$ множество тех функций $u(x,y) \in W_2^1(\Omega)(\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, для которых $Gu \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Лемма 3. *При выполнении следующих условий:*

$$\alpha(x,y) = \alpha(x),\ \beta(x,y) = \beta(x),\ \gamma(x,y) = \gamma = \text{const},\ \frac{\partial\alpha}{\partial x} \ge 0,\ \frac{\partial\beta}{\partial y} \ge 0,$$

$$\delta = \min_{(x,y)\in\Omega}\left[2\gamma - \frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right] > 0, \tag{18}$$

$$\alpha(x)\cos(s,\hat{\ }y) - \beta(y)\cos(s,\hat{\ }x) \ge 0$$

имеет место неравенство

$$(Gu,u)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \ge \frac{\delta}{2}\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)},\ \forall u \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega). \tag{19}$$

Доказательство. Действительно, для произвольной функции $u(x,y) \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и в силу леммы 2 имеем:

$$(Gu,u)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}Gu, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial y}Gu, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left(G\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(G\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{L_2(\Omega)} \ge$$

$$\ge \frac{\delta}{2}\|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\delta}{2}\|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{\delta}{2}\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что оператор G^{-1}, обратный к оператору G, отображающий $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap GW_2^1(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, является ограниченным в метрике пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Будем предполагать, что

$$\alpha(x,y) = wx,\ \beta(x,y) = wy,\ \gamma(x,y) = \gamma, \tag{20}$$

где w и γ — действительные постоянные такие, что

$$\gamma > w \ge 0 \text{ или } \ \gamma < w \le 0. \tag{21}$$

Лемма 4. *Для произвольной гладкой функции* $u(x, y)$ *имеет место следующее соотношение:*

$$MGu = (G + 2wI)Mu. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ имеет частные производные до третьего порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x^2} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2w\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wx\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + wy\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x\partial y} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2w\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + wx\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} + wy\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial y^2} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2w\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + wx\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} + wy\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \tag{25}$$

Умножая равенства (23), (24), (25), соответственно, на c_1, c_2, c_3 и суммируя, получим

$$MGu = \gamma Mu + 2wMu + wx\frac{\partial Mu}{\partial x} + wy\frac{\partial Mu}{\partial y} = GMu + 2wMu.$$

Лемма доказана.

Задача Дирихле (6), (7) в операторной форме эквивалентна изучению следующего квадратичного операторного пучка:

$$L(\lambda)u = Cu + \lambda Bu + \lambda^2 Iu, \tag{26}$$

где $B = -L^{-1}N$, $C = -L^{-1}M$ — самосопряженные ограниченные операторы С. Л. Соболева, действующие в соболевском пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, I — единичный оператор.

Предполагается, что области значений операторов B и C принадлежат $R_*(\Omega)$. Пучок $L(\lambda)$ при линеаризации, в свою очередь, порождает матричный оператор

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & B \end{pmatrix}, \tag{27}$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H(\Omega) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\oplus\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Полнота системы собственных векторов матричного оператора $\hat{A}$ в H означает двукратную полноту системы собственных элементов для квадратичного пучка $L(\lambda)$ и, следовательно, для краевой задачи (6), (7).

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L_*(\lambda) = C_* + \lambda B_* - \lambda^2 I, \tag{28}$$

где C_* и B_* — линейные операторы, действующие в пространстве $h_*(\Omega)$ согласно формулам

$$C_* u = G^{-1}CGu, \; B_* u = G^{-1}BGu, \; u \in h_*(\Omega) \tag{29}$$

I — единичный оператор в $h_*(\Omega)$. Ассоциированный с этим пучком матричный оператор

$$\hat{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_* & B_* \end{pmatrix} \tag{30}$$

действует в ортогональной сумме пространств $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. Оператор $\hat{A}_*$ можно представить в виде

$$\hat{A}_* = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{G}, \tag{31}$$

где матричный оператор

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \tag{32}$$

отображает $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, а его обратный

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \tag{33}$$

отображает $R_*(\Omega) \oplus R_*(\Omega)$ на $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Гладкие собственные функции краевой задачи (1), (2) являются собственными элементами для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u_\lambda(x,y)$ — гладкая собственная функция краевой задачи (1), (2) с собственным значением λ. Тогда в силу леммы 4 имеем

$$K(\lambda)Gu_\lambda = (G + 2\omega I)K(\lambda)u_\lambda = 0. \tag{34}$$

Отсюда в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1} заключаем

$$L_* u_\lambda = G^{-1}L^{-1}K(\lambda)Gu_\lambda = 0, \; u_\lambda(x,y) \in h_*(\Omega). \tag{35}$$

Обратно, пусть $u_\lambda(x,y) \in h_*(\Omega)$ — гладкий собственный элемент квадратичного пучка $L_*(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ, тогда, применяя последовательно операторы G и L, из равенства

$$L_*(\lambda)u_\lambda = G^{-1}CGu_\lambda + \lambda G^{-1}BGu_\lambda - \lambda^2 u_\lambda = 0 \tag{36}$$

получаем

$$K(\lambda)Gu_\lambda(x,y) = 0. \tag{37}$$

Отсюда в силу леммы 4

$$(G + 2\varpi I)K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0. \tag{38}$$

Но поскольку существует обратный оператор $(G + 2\varpi I)^{-1}$, то окончательно имеем

$$K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0, \ Gu_\lambda(x, y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Теорема доказана.

Вышедоказанная теорема показывает, что краевые задачи (1), (2) вполне характеризуются квадратичным операторным пучком $L_*(\lambda)$, который по построению подобен квадратичному пучку $L(\lambda)$, порожденному (6), (7).

Теорема 2. *Пусть $\gamma > w \geq 0$ $(\gamma \leq w \leq 0)$, тогда через двукратно полную в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ систему собственных функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap R_*(\Omega)$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ и обратно, через двукратно полную в метрике $W_2^2(\Omega)$ систему собственных функций пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций пучка $L(\lambda)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u_{\lambda_n}(x, y)$ — собственная функция для пучка $L(\lambda)$, тогда

$$GL_*(\lambda_n)G^{-1}u_{\lambda_n} = L(\lambda_n)u_{\lambda_n} = 0, \tag{39}$$

т.е. $\nu_{\lambda_n}(x, y) = G^{-1}u_{\lambda_n}(x, y) \in h_*(\Omega)$ является собственной функцией для пучка $L_*(\lambda)$. Двукратная полнота системы $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_1^\infty$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ означает полноту системы вектор-функции $\left\{\hat{u}_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n u_{\lambda_n} \end{pmatrix}\right\}_{n=1}^\infty$ матричного оператора $\hat{A}$ в $\hat{H}(\Omega) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Покажем, что вектор-функция

$$\hat{\nu}_{\lambda_n}(x, y) = \begin{pmatrix} \nu_{\lambda_n} \\ \lambda_n \nu_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1}u_{\lambda_n} \\ \lambda_n G^{-1}u_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \hat{G}^{-1}\hat{u}_{\lambda_n} \tag{40}$$

является собственным вектором для оператора $\hat{A}_*$.

На самом деле, имеем

$$\hat{A}_*\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{A}\hat{G}\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{u}_{\lambda_n} = \lambda_n\hat{\nu}_{\lambda_n}. \tag{41}$$

Пусть $\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор из $\hat{H}_*(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$.

Рассмотрим вектор

$$\hat{G}\hat{\nu} = \hat{w} \in H(\Omega). \tag{42}$$

Существует последовательность линейных комбинаций из собственных вектор-функций оператора $\hat{A}$, так что

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} u_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}(\Omega)} \hat{w} \text{ при } \ N \to \infty. \tag{43}$$

Отсюда в силу непрерывности оператора $\hat{G}^{-1}$

$$\sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{G}^{-1} \hat{u}_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{N} d_k^{(N)} \hat{\nu}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}_*(\Omega)} \hat{G}^{-1} \hat{w} = \hat{\nu}. \tag{44}$$

Таким образом, для матричного оператора $\hat{A}_*$ система $\{\nu_{\lambda_k} = \hat{G}^{-1} u_{\lambda_k}\}_1^\infty$ собственных вектор-функций полна в ортогональной сумме $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. А это означает, что система собственных функций квадратичного пучка $L_*(\Omega)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$. Обратно, пусть система собственных функций $\{\nu_{\lambda_k}(x,y)\}_{k=1}^\infty$ пучка $L_*(\lambda)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$ в метрике $W_2^2(\Omega)$. А это означает полноту в метрике $W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)$ системы собственных векторов $\left\{\hat{\nu}_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \nu_{\lambda_k} \\ \lambda_k \nu_{\lambda_k} \end{pmatrix}\right\}_1^\infty$ матричного оператора $\hat{A}_*$ в $\hat{H}_*(\Omega)$.

Пусть $\hat{u} = \binom{u_1}{u_2}$ — произвольный элемент из $\hat{H}(\Omega)$, тогда вектор $\hat{\nu} = \hat{G}^{-1}\hat{u} = \binom{G^{-1}u_1}{G^{-1}u_2} \in H_*(\Omega)$ и поэтому может быть аппроксимирован линейной комбинацией собственных векторов оператора $\hat{A}_*$

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{\nu}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)} \hat{\nu} \quad \text{при} \quad N \to \infty \tag{45}$$

В силу непрерывности оператора $\hat{G}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{N} l_k^{(N)} \hat{G} \hat{\nu}_{\lambda_k} \xrightarrow{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \oplus \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \hat{G}\hat{\nu} = \hat{u} \quad \text{при} \quad N \to \infty \tag{46}$$

Легко увидеть, что система $\hat{G}\hat{\nu}_{\lambda_k} \in \hat{H}(\Omega)$ является системой собственных векторов для оператора $\hat{A}$. Теорема доказана.

Предположим, что дифференциальные операторы M и L удовлетворяют следующим условиям:

$$\iint_\Omega Mpp d\Omega > 0, \ \iint_\Omega Lpp d\Omega < 0 \tag{$*$}$$

для всех отличных от нуля полиномов от x и y. В работе [5] при выполнении условия (*) для квадратичного пучка $L(\lambda)$ установлено существование двукратно полной системы полиномиальных собственных функций в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в случае, когда область Ω — единичный круг. Сопоставление этого результата с вышедоказанной теоремой позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Если область* Ω — *круг, при выполнении условий (*) и* $\gamma > \omega \geq 0$ $(\gamma < \omega \leq 0)$ *у квадратичного операторного пучка* $L_*(\lambda)$, *порожденного краевой задачей, имеется двукратная полная система полиномиальных собственных функций в* $h_*(\Omega)$

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Г. А. Саргсян

О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей

Рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Գ. Ա. Սարգսյան

Երրորդ եզրային խնդրից ծնված դիֆերենցիալ օպերատորային փնջերի սեփական ֆունկցիաների մասին

Ուսումնասիրվում է օպերատորների սպեկտրալ փոխկապակցություն քառակուսային օպերատորային փնջի համար՝ ծնված եզրային եւ Դիրիխլեի խնդիրներից:

G. A. Sargsyan

On Eigenfunctions of Diferencial Operator Bundles Generated by the Third Boundary Problem

The spectral correlation of operator bundles generated by boundary and Dirichled problems is investigated.

Литература

1. *Келдыш М. В.* - ДАН СССР. 1951. Т. 77. N1. С. 11-14.

2. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* - Тр. Междунар. симп. по применению т.ф.к.п в механике сплошной среды. Наука. М. 1965.

3. *Александрян Р.А.* - ТМО. 1960. Т. 9. С. 455-505.
4. *Зеленяк Т. И.* - ДАН СССР. 1964. Т. 158. N6. С. 1268-1270.
5. *Вирабян Г. В.* - ДАН АрмССР. 1966. Т. 43. N 1. С.15-20.
6. *Вирабян Г. В.* - ДАН АрмССР. 1969. Т. 48. С. 65-70.
7. *Акопян Г. С.* - ДАН АрмССР. 1980. Т. 70. N2. С. 80-84.
8. *Акопян Г. С.* - ДАН АрмССР. 1988. Т. 86. N4. С. 147-152.
9. *Саргсян Г. А.* - Уч. зап. ЕГУ. 1994. N1. С. 19-25.
10. *Саргсян Г. А.* - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N3. С. 211-217.
11. *Саргсян Г. А.* - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N4. С. 291-296.